Д. ГИЛЬБЕРТ и С. КОН-ФОССЕН

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
С. А. КАМЕНЕЦКОГО

Цена 7 р. Пер. 1 р.

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Редакция *Р. Н. Бончковского.*
Корректура *О. Н. Барашковой.*
Оформление *С. Л. Дыман.*
Выпускающий *Я. Я. Вигонт.*

Изд. № 77. Тираж 7.000. Сдано в набор 27/VI 1936 г. Подп. в печ. 29/VI 1936 г. Формат бумаги 62×94. Уч.-авт. л. 24. Бум. лист. 9½. Печ. зн. в бум. листе 101.000. Заказ № 1107. Уполном. Главл. № В-37065. Выход в свет август 1936 г.

3-я тип. ОНТИ им. Бухарина. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В математике, как и вообще в научных исследованиях, встречаются две тенденции: тенденция к абстракции — она пытается выработать логическую точку зрения на основе различного материала и привести весь этот материал в систематическую связь — и другая тенденция, тенденция к наглядности, которая в противоположность этому стремится к живому пониманию объектов и их *внутренних* отношений.

Что касается геометрии, то в ней тенденция к абстракции привела к грандиозным систематическим построениям алгебраической геометрии, римановой геометрии и топологии, в которых находят широкое применение методы абстрактных рассуждений, символики и анализа. Тем не менее и ныне наглядное понимание играет первенствующую роль в геометрии, и притом не только как обладающее большой доказательной силой при исследовании, но и для понимания и оценки результатов исследования.

Здесь мы будем рассматривать геометрию в ее современном состоянии с наглядной стороны. Руководствуясь непосредственным созерцанием, мы сможем уяснить многие геометрические факты и постановку вопросов и благодаря этому во многих случаях мы сможем также изложить в наглядной форме методы исследований и доказательств, которые приводят к пониманию теорем без введения в рассмотрение деталей абстрактных теорий и выкладок. Например доказательство того, что сфера со сколь угодно малой дырой все еще разгибаема, или что два различных тора не всегда могут быть конформно отображены друг на друга, можно представить в такой форме, которая дает представление о ходе доказательства, не заставляя следовать за деталями аналитического изложения.

Благодаря разносторонности геометрии и ее отношениям к различным ветвям математики мы получим, таким образом, обзор математики вообще и представление об изобилии ее проблем и о богатстве содержащихся в ней идей. Так, с помощью наглядного рассмотрения выявятся результаты важнейших направлений геометрии, содействующие справедливой оценке математики в широкой публике. Ибо вообще математика не пользуется популярностью, хотя ее значение и признается. Причина этого лежит в распространенном представлении о математике как о продолжении и более высокой ступени счетного мастерства. Этому представлению должна противостоять наша книга, в которой вместо формул приведено много наглядных фигур, которые читатель легко дополнит моделями.

Книга должна послужить увеличению числа друзей математики, облегчая читателю проникновение в математику без необходимости изучения ее, сопряженного с известными трудностями.

При такой целеустановке благодаря богатству материала не может быть никакой речи о систематичности и полноте изложения; не могли быть исчерпаны также и отдельные темы. Далее невозможно во всех разделах этой книги предполагать у читателя равную степень математической подготовки. В то время как вообще изложение совершенно элементарно, некоторые прекрасные математические исследования можно изложить вполне понятно только прошедшим уже некоторую школу, если избегать утомительных длиннот.

Все добавления к отдельным главам предполагают известное предварительное образование. Они всегда дополняют, а не поясняют текст.

Различные ветви геометрии находятся в тесных и часто неожиданных взаимоотношениях друг с другом. В нашей книге это очень часто проявляется. При большом разнообразии материала было все же необходимо придать каждой отдельной главе известную законченность и в последующих главах не предполагать полного знания предыдущих; путем отдельных маленьких повторений мы надеялись достигнуть того, что каждая отдельная глава, а иногда даже отдельные разделы представляют интерес сами по себе и в отдельности доступны пониманию читателя. Пусть читатель прогуливается в огромном саду геометрии, в котором каждый может подобрать себе такой букет, какой ему нравится.

Основу этой книги составили четырехчасовые лекции «Наглядной геометрии», которые я читал зимой 1920/21 г. в Геттингене и которые обработал В. Роземан. В основном содержание и построение их остались неизмененными. В деталях С. Кон-Фоссен многое переработал и частично расширил.

Давид Гильберт.

Геттинген, июнь 1932 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава IV. ДИФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава V. КИНЕМАТИКА

Глава VI. ТОПОЛОГИЯ

Добавление к главе шестой

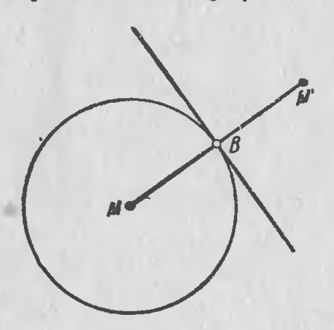
ПЕРВАЯ ГЛАВА

ПРОСТЕЙШИЕ КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ

1. Плоские кривые. Простейшей поверхностью является плоскость, простейшими кривыми — плоские кривые, простейшая среди последних — прямая. Прямую можно определить либо как кратчайший путь между двумя точками, либо как линию пересечения двух плоскостей, либо как ось вращения.

Следующей в порядке возрастания сложности кривой является окружность. Уже эта фигура послужила исходной точкой для столь многочисленных и столь глубоких исследований, что они могли бы сами по себе заполнить содержание целого курса. Мы определяем окружность как кривую, все точки которой отстоят на равном расстоянии от данной точки. Мы получаем окружность общеизвестным построением при помощи циркуля или натянутой нити.

Самое построение наглядно показывает, что окружность есть замкнутая, на всем протяжении выпуклая кривая; поэтому через каждую точку окружности можно провести определенную прямую — касательную, имеющую с окружностью только одну общую точку, точку касания, а в остальной части лежащую целиком вне окружности (черт. 1). Радиус MB, проведенный в точку касания B, должен быть кратчайшим расстоянием от центра M круга до касательной t, ибо все точки последней, за исключением точки касания, лежат вне круга и, следовательно, отстоят от центра дальше, чем точка касания. Отсюда далее следует, что этот радиус перпендикулярен к касательной. Для доказательства построим зеркальное изображение центра M относительно прямой t, т. е. опустим перпендикуляр из точки M на прямую t и продолжим его на равное расстояние до точки M'; тогда M' называется зеркальным изображением точки M. А так как MB есть кратчайшее расстояние от M до t, то из соображений симметрии $M'B$ также должно быть кратчайшим расстоянием от M' до t. Следовательно, MBM' должно быть кратчайшим расстоянием между M и M', и, значит, линия MBM' не может иметь излома в точке B, т. е. MB действительно является перпендикуляром к t.



Черт. 1.

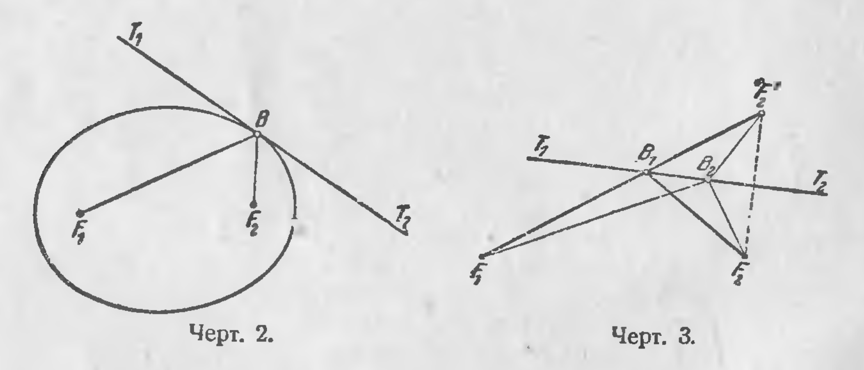
Само собой напрашивается обобщение этого построения окружности, а именно: при построении окружности с помощью нити мы брали связанную нить, закрепляли ее конец в неподвижной точке, центре круга, и, натягивая нить, вычерчивали кривую. Если же закрепить связанную нить не в одной, а в двух точках, то мы получим кривую, похожую на окружность, называемую эллипсом. Обе точки закрепления нити называются фокусами эллипса. Построение с помощью нити показывает, что эллипс можно определить как кривую, точки которой имеют постоянную сумму расстояний от двух данных точек. Сближая обе точки, мы получим окружность как предельный случай эллипса. Всем упомянутым свойствам окружности соответствуют простые свойства эллипса. Эллипс также замкнут, всюду выпуклый и имеет в каждой своей точке касательную, которая за исключением точки касания целиком лежит вне эллипса. Радиусам окружности соответствуют в эллипсе две прямые, соединяющие точку эллипса с фокусами. Они называются радиусами-векторами точки эллипса.

Тому факту, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу в точке касания, соответствует в случае эллипса то, что касательная образует равные углы с радиусами-векторами, проведенными в точку касания.

Это утверждение означает, что на черт. 2:

$$\angle F_1BT_1 = \angle F_2BT_2.$$

Для доказательства (черт. 3) построим зеркальное изображение точки F_2 относительно касательной и обозначим его F_2'. Прямая F_1F_2', которая пересекается с касательной в некоторой точке B_1, есть кратчайшее рас-



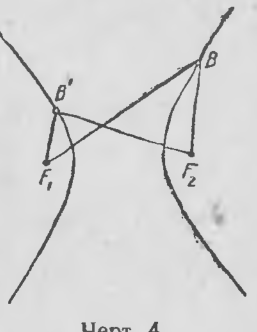
Черт. 2. Черт. 3.

стояние между F_1 и F_2'. Следовательно $F_1B_1F_2$ есть кратчайший путь от F_1 к F_2, имеющий общую точку с касательной, ибо для всякой иной точки B_2 касательной $F_1B_2F_2 = F_1B_2F_2'$ будет больше, чем $F_1B_1F_2 = F_1B_1F_2'$. С другой стороны, кратчайший путь между F_1 и F_2, имеющий общую точку с касательной, образуют радиусы-векторы, проведенные в точку касания B, ибо всякая другая точка касательной, как расположенная вне эллипса, имеет бóльшую сумму расстояний от фокусов, чем точка B эллипса; значит точки B и B_1 совпадают, а отсюда и вытекает наше

утверждение, ибо F_2 и F_2' расположены симметрично относительно прямой T_1T_2, а $\measuredangle F_1B_1T_1$ есть вертикальный угол для $\measuredangle F_2'B_1T_2$.

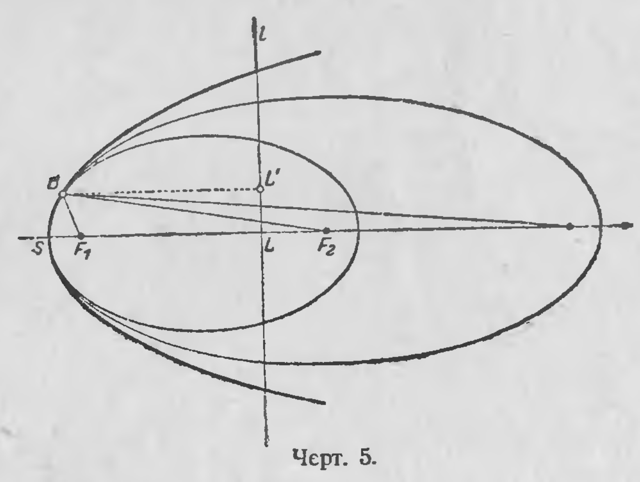
Это свойство касательной к эллипсу находит применение в оптике, чем и объясняется название «фокусы». Именно, если поместить источник света в одном фокусе, то лучи, зеркально отраженные от эллипса, соберутся в другом фокусе.

Не так легко, как построение эллипса, хотя принципиально столь же просто, построение кривой, у которой *разность* расстояний ее точек от двух неподвижных точек постоянна. Эта кривая называется гиперболой, а неподвижные точки — ее фокусами. Для каждой точки B или B' кривой (черт. 4) должно удовлетворяться или соотношение $F_1B - F_2B = a = \text{const.}$ или $F_2B' - F_1B' = a$. Соответственно этому гипербола состоит из двух отдельных ветвей. Вид гиперболы наглядно показывает, что кривая эта всюду выпукла и имеет касательную во всякой точке. Ниже (стр. 16, примечание) будет показано, что и в случае гиперболы касательная к кривой имеет с этой кривой только одну общую точку — именно точку прикосновения. Так же, как и в случае эллипса, можно показать, что касательная к гиперболе делит пополам угол между радиусами-векторами, проведенными в точку касания (черт. 6).



Черт. 4.

Из эллипса с помощью предельного перехода можно получить новую кривую — параболу (черт. 5). Для этого оставим один фокус, например F_1, и ближайшую к нему вершину S эллипса неподвижными (вершинами



Черт. 5.

эллипса называются точки пересечения кривой с прямой, соединяющей ее фокусы). Будем теперь рассматривать эллипсы, получающиеся при перенесении второго фокуса F_2 все далее от точки F_1 на продолжение прямой SF_1; эти эллипсы стремятся к некоторой предельной кривой, которая и есть парабола. Из самого предельного перехода можно вывести

простое определение параболы. Именно, при вычерчивании эллипса с помощью нити мы можем заметить, что если карандаш находится вблизи точки S (черт. 5), то при достаточно большом расстоянии между F_1 и F_2 отрезок нити, соединяющей карандаш с точкой F_2, почти параллелен линии SF_1. Следовательно, если в некоторой точке L прямой F_1F_2 восставить перпендикуляр l к F_1F_2, то приближенно будем иметь:

$$F_1B + BF_2 = F_1B + BL' + LF_2 = \text{const.}$$

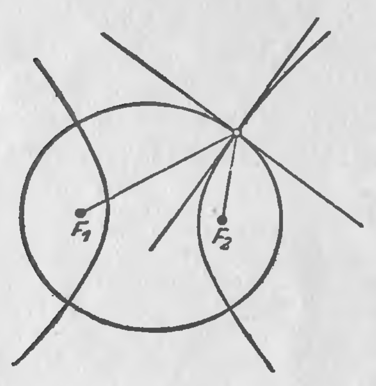
(где L' — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую l). Если теперь ввести новую постоянную, равную

$$\text{const.} - LF_2$$

(LF_2 имеет постоянное значение для каждой кривой), то будем иметь:

$$F_1B + BL' = \text{const.}$$

Это соотношение будет удовлетворяться с тем большей точностью, чем больше расстояние F_1F_2, а для предельной кривой оно будет вполне точно. Таким образом парабола есть кривая, для точек которой сумма расстояний от некоторой определенной точки и некоторой определенной прямой постоянна или (что приводит к тому же) такая кривая, точки которой отстоят на равном расстоянии от некоторой постоянной точки и некоторой постоянной прямой. Мы получим эту последнюю прямую, если проведем прямую, параллельную l и расположенную по другую сторону от точки S на расстоянии, равном SF_1; она называется директрисой параболы.



Черт. 6.

Если вообразить, что парабола представляет собой отражающее зеркало, то она должна отражать все лучи, падающие параллельно F_1S, в точку F_1; это также следует из предельного перехода.

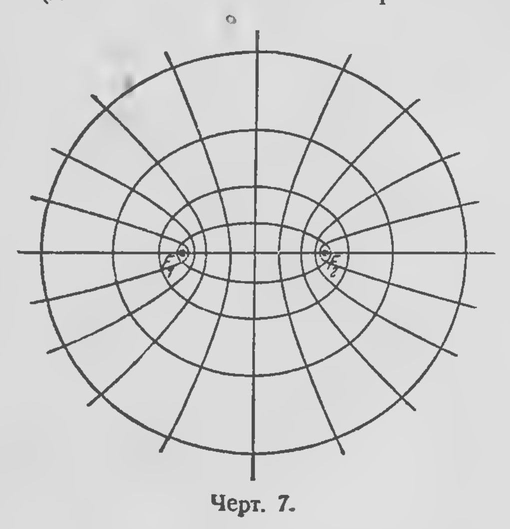
Мы рассмотрели семейство эллипсов, имеющих общую вершину и общий ближайший к этой вершине фокус. Теперь рассмотрим семейство всех эллипсов, имеющих общие фокусы. Это семейство «софокусных» эллипсов покрывает плоскость однократно и непрерывно, т. е. через каждую точку плоскости проходит одна и только одна кривая семейства; действительно, каждой точке соответствует вполне определенная сумма расстояний от этой точки до фокусов, и следовательно, каждая точка принадлежит тому эллипсу, которому соответствует эта сумма расстояний [1]).

[1]) Отрезок прямой, соединяющий оба фокуса, представляет также эллипс (особенный, выродившийся). Этот эллипс получается, если принять за значение суммы расстояний длину отрезка прямой, соединяющей фокусы.

Возьмем еще семейство гипербол, имеющих эти же взятые нами точки в качестве фокусов. Это семейство также покрывает плоскость однократно и непрерывно [1]). Так что через каждую точку плоскости проходят в точности две кривые системы, состоящей из софокусных эллипсов и гипербол (черт. 6).

В каждой точке (за исключением фокусов) касательные к проходящим через эту точку двум кривым — эллипсу и гиперболе — делят пополам угол между радиусами-векторами взятой точки и смежный с ним угол; следовательно, касательные эти взаимно перпендикулярны.

Таким образом софокусные эллипсы и гиперболы образуют два «взаимно ортогональных семейства кривых» (два семейства называются ортогональными, если каждая кривая одного семейства пересекает каждую кривую другого семейства под прямым углом; угол пересечения двух кривых определяется как угол между касательными к этим кривым, проведенными в точке пересечения).



Черт. 7.

Теперь, чтобы получить наглядное представление о нашей системе кривых (черт. 7), начнем с прямой, перпендикулярной к отрезку F_1F_2, проходящей через его середину, и затем рассмотрим семейство гипербол. Мы видим, что гиперболы становятся все более сжатыми и наконец переходят в полупрямые, служащие продолжением отрезка F_1F_2 вправо и влево. При этом плоскость целиком заполняется гиперболами.

Теперь мы переходим к самому отрезку F_1F_2, к которому непосредственно примыкают сперва очень сжатые эллипсы, которые затем постепенно становятся все более округлыми и вместе с тем безгранично растут. Таким образом мы вторично заполняем всю плоскость.

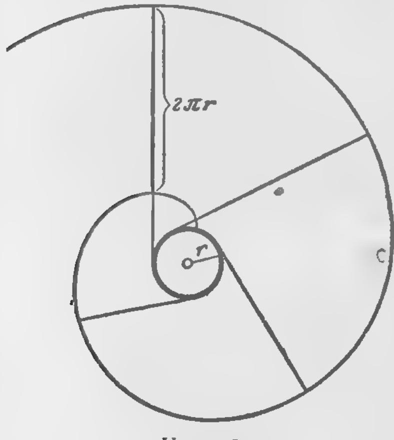
Другой, и притом исключительно простой, пример взаимно ортогональных семейств кривых представляют концентрические окружности и прямые, проходящие через их общий центр. Эту систему можно получить из предыдущей путем предельного перехода, заставляя сближаться оба фокуса. При этом эллипсы переходят в окружности, а гиперболы — в пары прямых.

Линии уровня и линии наибольшего подъема на географических картах суть также ортогональные семейства.

---

[1]) Прямая, проходящая через оба фокуса, если из нее выбросить отрезок соединяющий фокусы, есть вырожденная гипербола, точно так же, как прямая перпендикулярная к отрезку, соединяющему фокусы, и проходящая через его середину; для этой последней разность расстояний имеет постоянное значение — нуль.

Наконец упомянем другое построение с помощью нити, приводящее к ортогональным семействам. Возьмем конец нити, навернутой на какую-нибудь выпуклую кривую, например на окружность, и станем разматывать нить, все время натягивая ее (черт. 8). Тогда конец нити опишет «эвольвенту» окружности. Эта кривая описывает один за другим витки вокруг окружности, представляя собой, таким образом, спираль. Само построение наглядно показывает, что кривая перпендикулярна к одной из двух касательных к окружности, которые можно провести из какой-либо точки кривой. Все последующие витки эвольвенты также пересекают эту касательную под прямым углом, причем отрезок касательной между двумя последующими витками эвольвенты имеет постоянную длину и равен как раз длине взятой окружности.



Черт. 8.

Можно получить бесконечное множество эвольвент той же самой окружности, если при разматывании нити начать с других точек окружности. Но все эвольвенты могут быть получены также из одной эвольвенты путем вращения ее вокруг центра окружности. Семейство эвольвент покрывает всю плоскость за исключением внутренности круга однократно и непрерывно. Оно ортогонально к семейству полупрямых, касательных к окружности, взятых в определенном направлении обхода окружности.

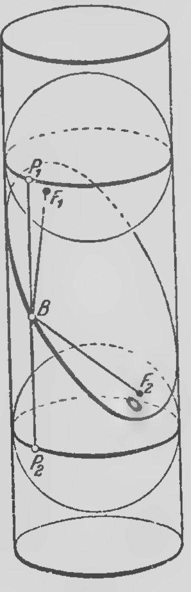
И вообще для любого заданного семейства прямых ортогональное семейство состоит из эвольвент. Образующая их кривая — та, которую (как в нашем примере окружность) огибают прямые заданного семейства.

Мы вернемся еще к этому в диференциальной геометрии (гл. IV) и кинематике (гл. V).

2. Цилиндр и конус; конические сечения и поверхности вращения, образуемые ими. Простейшую кривую поверхность, именно круговой цилиндр, можно получить при помощи простейших кривых — окружности и прямой — следующим образом. Через одну из точек окружности проведем прямую, перпендикулярную к плоскости круга, и будем перемещать ее параллельно самой себе вдоль всей окружности. Далее можно получить круговой цилиндр, заставив одну прямую вращаться вокруг другой прямой, параллельной первой и служащей для первой прямой осью вращения. Таким образом круговой цилиндр есть *поверхность вращения*. Поверхности вращения представляют важный тип поверхностей; они встречаются в практическом обиходе в виде стаканов, бутылок и т. д. Все они могут быть охарактеризованы тем, что их можно получить путем вращения некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Плоскость, перпендикулярная к оси, пересекает круговой цилиндр по окружности; плоскость, наклонная к оси, дает в сечении, как в этом можно непосредственно убедиться, эллипсовидную кривую. Покажем, что

эта кривая есть действительно эллипс. Для этого возьмем шар такого диаметра, чтобы он в точности соответствовал внутренности цилиндра, и будем передвигать этот шар внутри цилиндра до соприкосновения с секущей плоскостью (черт. 9). Точно такой же шар возьмем с другой стороны секущей плоскости и также продвинем его до соприкосновения с плоскостью сечения. Шары соприкасаются с цилиндром по двум окружностям, а с плоскостью сечения имеют две точки соприкосновения F_1 и F_2. Соединим теперь произвольную точку B кривой пересечения с точками F_1 и F_2 и рассмотрим образующую цилиндра, проходящую через точку B. Пусть она пересекается с окружностями соприкосновения шаров и цилиндра в точках P_1 и P_2. Прямые BF_1 и BP_1 — касательные к одному и тому же шару, проходящие через точку B. Все такие касательные имеют равную длину, что непосредственно следует из всесторонней симметрии шара по отношению к вращению. Таким образом имеем: $BF_1 = BP_1$, и точно так же получаем: $BF_2 = BP_2$. Отсюда



Черт. 9.

$$BF_1 + BF_2 = BP_1 + BP_2 = P_1P_2.$$

Но расстояние P_1P_2 не зависит от выбора точки B на кривой вследствие симметрии фигуры по отношению к вращению. Следовательно, для всех точек сечения сумма расстояний от точек F_1 и F_2 одинакова, т. е. сечение представляет эллипс с фокусами F_1 и F_2.

Мы можем сформулировать полученный результат как теорему о проекциях, а именно: тень круга, получающаяся на плоскости, наклонной к плоскости круга, при освещении круга лучами, перпендикулярными к его плоскости, представляет эллипс.

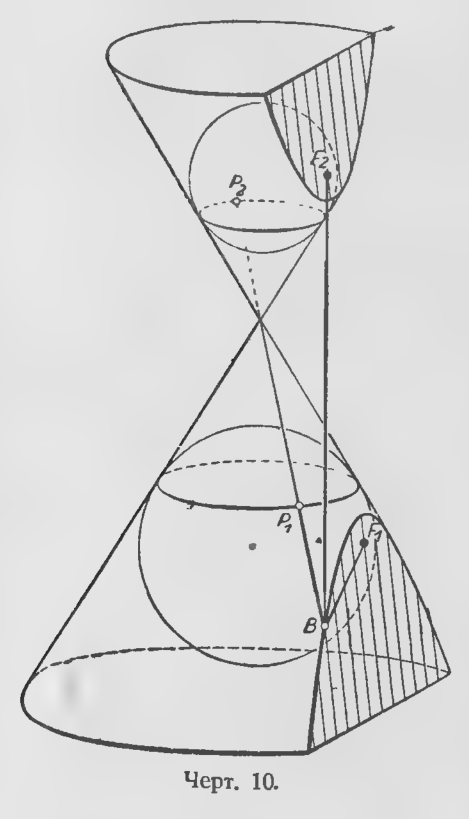
Следующей за круговым цилиндром простейшей поверхностью вращения является круговой конус. Он получается при вращении прямой вокруг пересекающей ее оси. Конус образуют все касательные, проведенные из одной и той же неподвижной точки к неподвижному шару, или все лучи, проектирующие круг из некоторой точки, взятой на его оси (т. е. на прямой, проходящей через центр круга перпендикулярно к его плоскости).

Плоскость, перпендикулярная к оси кругового конуса, пересекает его по окружности; если же несколько наклонить секущую плоскость, то сечение превратится в эллипс. Это можно доказать, как и в случае кругового цилиндра, при помощи двух вспомогательных шаров, касающихся плоскости сечения.

Если секущую плоскость все больше наклонять, то эллипсы будут все больше вытягиваться; наконец, когда секущая плоскость сделается параллельной одной из образующих конуса, кривая, получающаяся в сечении, уже не замыкается в конечной части плоскости. При помощи предельного перехода, аналогичного проведенному выше, можно убедиться, что эта кривая есть парабола.

Если дальше увеличивать наклон секущей плоскости, то она начнет

пересекать и другую часть конуса, которую раньше не пересекала; кривая, получающаяся в сечении в этом случае, имеет вид гиперболы (черт. 10). Чтобы доказать, что эта кривая есть в самом деле гипербола, поместим в обе полости конуса шары, которые соприкасаются как с конусом, так и с плоскостью сечения (в этом случае оба шара будут расположены по одну сторону от секущей плоскости, в то время как в случае эллипса они располагались по разные стороны). Доказательство проводится в полном соответствии с рассуждением на стр. 15. Имеем (черт. 10):



Черт. 10.

$$BF_1 = BP_1,$$
$$BF_2 = BP_2,$$
$$BF_1 - BF_2 =$$
$$= BP_1 - BP_2 = P_1P_2 = \text{const}.$$

Итак мы убедились, что всякое сечение конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, представляет либо эллипс, либо параболу, либо гиперболу [1]).

Мы видим, что эти кривые имеют внутреннее сродство, в связи с чем они объединяются под общим названием *конических сечений* [2]).

К трём упомянутым «собственным» коническим сечениям следует добавить в качестве «несобственных» предельные формы конических сечений, получаемые в том случае, когда секущая плоскость проходит через вершину конуса или когда конус вырождается в цилиндр. Таким образом в качестве выродившихся конических сечений следует принять: точку, прямую «считаемую дважды», две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые и пустую плоскость.

Конические сечения называются также *кривыми второго порядка*. Это название они получили потому, что в декартовых координатах они выражаются уравнениями второй степени. Это свойство не может быть непосред-

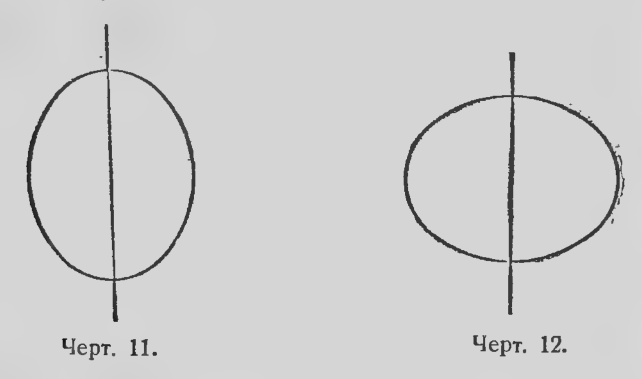
---

[1]) Круг следует рассматривать как предельный случай эллипса.

[2]) Итак тень круга на любую плоскость есть коническое сечение, если источник света находится в какой-либо точке на оси круга. Что при этом могут получиться гиперболы, можно видеть на примере конуса света автомобильной фары; в плоскости дороги он освещает внутренность одной ветви гиперболы. Так как каждую касательную к гиперболе можно рассматривать как тень касательной к окружности, то касательная к гиперболе имеет с гиперболой только одну общую точку — точку прикосновения, как и было указано на стр. 11.

ственно наглядно сформулировано, но из него можно получить вполне наглядное следствие: коническое сечение не может пересекаться с прямой более чем в двух точках. Однако имеется много других кривых, обладающих тем же свойством. В дополнениях к этой главе приводятся еще два геометрических факта, которые так же, как построение с помощью фокусов, характеризуют все невыродившиеся конические сечения. Это — построение при помощи подэры и свойства директрис.

После того как мы получили цилиндр и конус при помощи вращения прямой, естественно напрашивается мысль рассмотреть поверхности, получающиеся при вращении конических сечений. При этом будем выбирать ось вращения так, чтобы коническое сечение располагалось симметрично



Черт. 11. Черт. 12.

по отношению к ней. Тогда части кривой, лежащие по обе стороны оси, переходят одна в другую после полуоборота, так что мы получаем единственную поверхность; при другом же расположении оси получилась бы гораздо более сложная фигура.

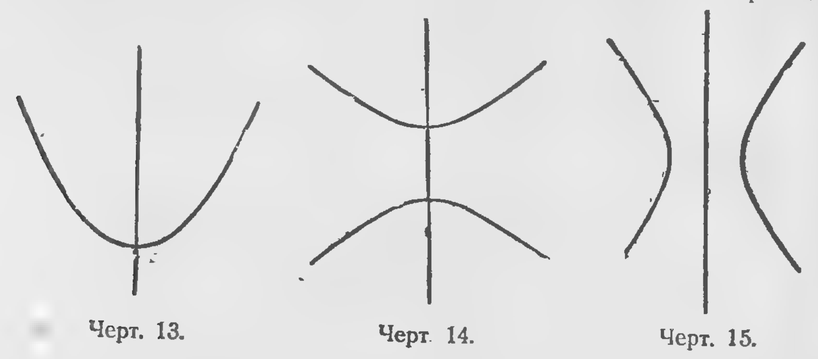
Так как эллипс имеет две оси симметрии, то он порождает две различные поверхности вращения. В зависимости от того, будем ли мы вращать эллипс вокруг большей или меньшей оси, мы получим вытянутый (черт. 11) или сжатый (черт. 12) эллипсоид вращения. Общеизвестным и часто приводимым примером последней поверхности служит Земля; приближенным примером первой поверхности может служить куриное яйцо.

Если уменьшать разницу в длине между большой и малой осями эллипса, то получим переходный случай между обоими эллипсоидами вращения. В этом случае, когда обе оси станут равными, эллипс превратится в круг, и мы получим при вращении шар. Так как шар симметричен относительно любого из своих диаметров, то его можно получить вращением бесчисленным множеством способов. В этом и состоит отличительное свойство, характеризующее шар: шар — единственная поверхность, которую можно получить вращением более чем одним способом.

Парабола имеет лишь одну ось симметрии и потому порождает единственную поверхность вращения — параболоид вращения (черт. 13).

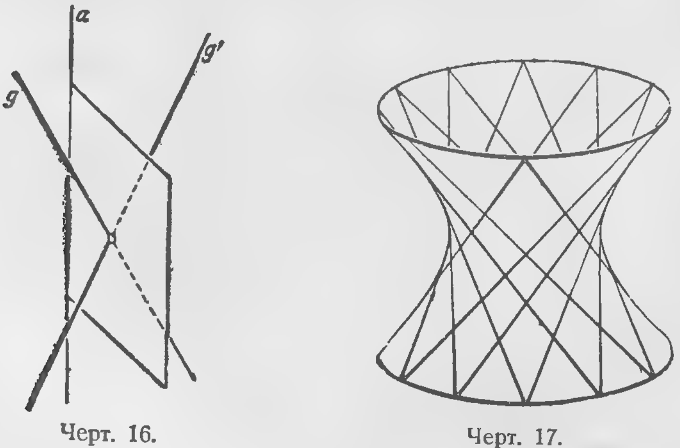
Наоборот, гипербола порождает две различные поверхности вращения. В зависимости от того, происходит ли вращение вокруг линии, соединяющей фокусы, или вокруг перпендикулярной к ней прямой, проходящей через ее середину, мы получаем двуполостный (черт. 14) или однополо-

стный (черт. 15) гиперболоид вращения. Здесь следует отметить тот поразительный факт, что на поверхности однополостного гиперболоида лежит бесконечное множество прямых; именно эту поверхность можно получить также путем вращения прямой вокруг другой прямой, не лежащей с ней в одной плоскости (до сих пор мы познакомились лишь с такими поверхностями вращения, у которых ось лежит в одной плоскости с образующей кривой). Доказательство этого может быть проведено



Черт. 13. Черт. 14. Черт. 15.

только аналитическим путем. Однако можно непосредственно убедиться, что подобным построением можно получить эту поверхность двумя способами. В самом деле, рассмотрим прямую g' (черт. 16), симметричную с прямой g, образующей нашу поверхность, по отношению к плоскости,

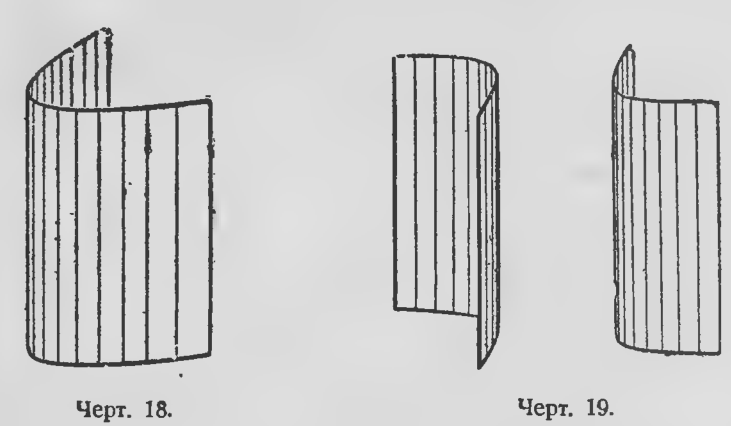


Черт. 16. Черт. 17.

проходящей через ось a. Прямая g' должна образовать при вращении ту же самую поверхность, что и прямая g.

В соответствии с этим однополостный гиперболоид вращения содержит два семейства прямых, причем каждое семейство само по себе целиком покрывает всю поверхность, и прямые обоих семейств так расположены, что каждая прямая одного семейства пересекает каждую прямую другого семейства (или параллельна ей), между тем как две прямые одного и того же семейства расположены всегда в разных плоскостях (черт. 17).

3. Поверхности второго порядка. Поверхности, получающиеся путем вращения конических сечений, являются частными случаями более общего класса поверхностей, называемых из аналитических соображений поверхностями второго порядка; это — поверхности, точки которых в декартовых пространственных координатах удовлетворяют уравнению второй степени. Отсюда легко вывести аналитически, что эти поверхности обладают той особенностью, что любая плоскость пересекает их по кривой второго порядка, т. е. по некоторому (собственному или несобственному) коническому сечению. Далее, если из некоторой точки провести всевозможные касательные к поверхности второго порядка, то они образуют конус, пересечение которого с любой плоскостью также дает коническое



Черт. 18. Черт. 19.

сечение. Конус этот соприкасается с поверхностью также по некоторому коническому сечению. Поверхности второго порядка — единственные поверхности, все плоские сечения которых являются кривыми второго порядка [1]).

Рассмотрим теперь различные типы поверхностей второго порядка.

Из кругового цилиндра путем обобщения получается эллиптический цилиндр. Этот цилиндр образует прямая, движущаяся по эллипсу, перпендикулярная к его плоскости. Таким же способом, положив в основание параболу или гиперболу, получим параболический или гиперболический цилиндр (черт. 18 и 19).

Соответствующее обобщение кругового конуса дает общий конус второго порядка. Его мы получим, если соединим все точки какого-нибудь собственного конического сечения с некоторой точкой, расположенной вне плоскости этого конического сечения.

Следует при этом заметить, что в противоположность случаю с цилиндром мы не получаем различных типов поверхностей, когда исходим от эллипса, от параболы или от гиперболы; как мы уже видели, плоскость может образовать в пересечении с одним и тем же конусом все три

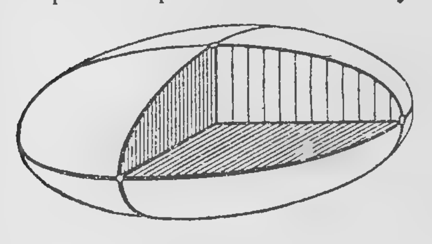
---

[1]) Из указанного только что свойства следует, что прямая, не совпадающая с поверхностью на протяжении целого отрезка, может иметь с ней не более двух общих точек; однако последним свойством обладают помимо поверхностей второго порядка многие другие поверхности, например поверхность куба.

конических сечения, в пересечении же с одним и тем же цилиндром этого получить нельзя.

Конус и эллиптический цилиндр можно получить из соответствующих поверхностей вращения также путем деформации, которая называется *растяжением*. Закрепим неподвижно все точки какой-нибудь плоскости, проходящей через ось вращения, и представим себе, что все остальные точки пространства сдвинуты по направлению к неподвижной плоскости или отодвинуты в противоположном направлении так, что расстояния всех этих точек от неподвижной плоскости изменились в одном и том же отношении. Можно доказать, что такое преобразование переводит все круги в эллипсы (или в круги). Далее оно переводит все прямые в прямые же, все плоскости в плоскости[1]) и все кривые и поверхности второго порядка опять-таки в кривые и поверхности второго порядка.

Применяя растяжение к вытянутому или сжатому эллипсоиду вращения, получим эллипсоид самого общего вида. В то время как всякий эллипсоид вращения симметричен по отношению к любой плоскости, проходящей через ось вращения, эллипсоид самого общего вида имеет всего только три плоскости симметрии, которые расположены перпендикулярно друг к другу. Отрезки трех линий пересечения этих плоскостей, заключенные внутри эллипсоида, имеют неравную длину; они называются «большой», «средней» и «малой» осями эллипсоида (черт. 20).



Черт. 20.

Из трехосного эллипсоида можно снова получить вытянутый или сжатый эллипсоид вращения, если, применив преобразование растяжения, сделать равными друг другу большую и среднюю или среднюю и малую оси.

Форму трехосного эллипсоида часто принимают камни на морском берегу. Вода морского прибоя, шлифуя камни, постепенно придает камню любого вида форму, наиболее близкую к эллипсоиду. Математическое исследование этого явления приводит к вопросам теории вероятностей.

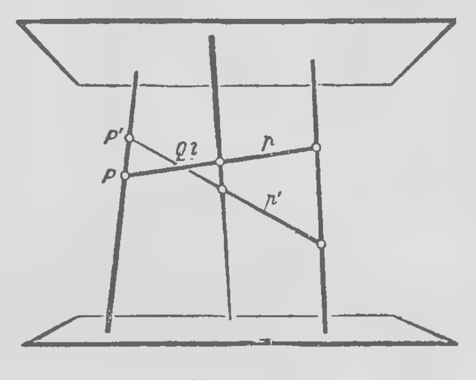
Наиболее общими поверхностями, получающимися путем растяжения гиперболоидов вращения и параболоида вращения, являются однополостный и двуполостный гиперболоиды и эллиптический параболоид. Оба гиперболоида имеют по три плоскости симметрии, а эллиптический параболоид — две.

Так как всякое растяжение переводит прямые линии в прямые же, то однополостный гиперболоид общего вида обладает тем же свойством, как и соответствующая поверхность вращения: на нем расположены два семейства прямых. Они расположены так же, как и на однополостном гиперболоиде вращения, т. е. каждая прямая одного семейства пересекается со всякой прямой другого семейства, в то время как прямые одного и того же семейства не пересекаются друг с другом, будучи

---

[1]) Изменение формы различных фигур, расположенных на плоскости, при этом такое же, как при параллельной проекции плоскости на другую плоскость, наклоненную под некоторым углом по отношению к первой.

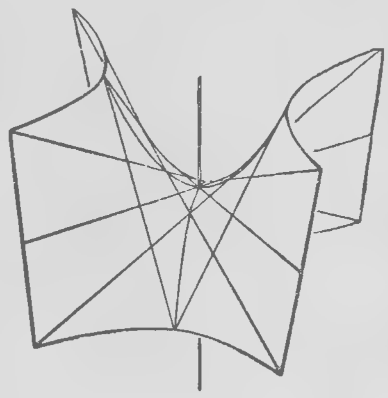
расположены в разных плоскостях. Отсюда получаем следующий способ построения однополостного гиперболоида. Возьмем три произвольные прямые одного семейства (черт. 21). Так как они расположены в разных плоскостях, то через любую точку P одной из этих прямых можно провести одну и только одну прямую p, которая пересечет две других прямых; это будет линия пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через точку P и вторую прямую, а другая — через точку P и третью прямую. Прямая p имеет три общие точки с гиперболоидом и, следовательно, должна целиком лежать на гиперболоиде, так как гиперболоид как поверхность второго порядка не может пересекаться с прямой более чем в двух точках.



Черт. 21.

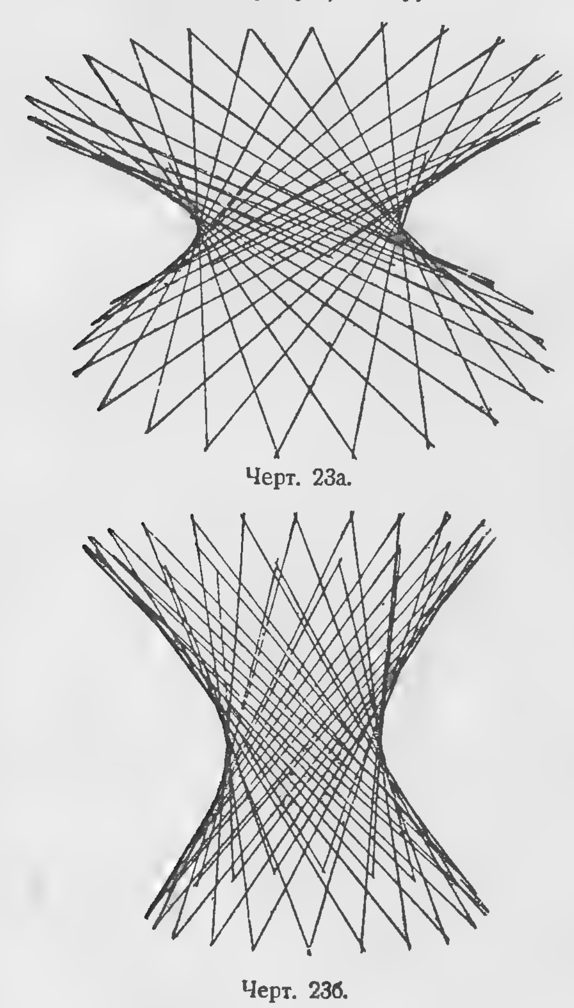
Если мы заставим точку P пробегать всю первую прямую, то соответствующая прямая p пробежит все прямые того семейства, к которому не принадлежит первая прямая. Если теперь из этого второго семейства снова взять три произвольные прямые, то таким же способом мы получим прямые первого семейства, в том числе, конечно, и три взятые первоначально прямые. Само построение показывает, что все прямые одного и того же семейства расположены в разных плоскостях; ибо если бы прямые p и p' (черт. 21) пересекались в некоторой точке Q, то взятые первоначально прямые лежали бы в плоскости $PP'Q$, между тем как они по условию лежат в разных плоскостях.

Таким образом три прямые, расположенные в разных плоскостях, всегда определяют некоторый однополостный гиперболоид, за исключением того случая, когда взятые три прямые параллельны одной и той же плоскости (не будучи параллельными между собой). В этом случае они определяют новую поверхность второго порядка, которая не может быть получена из поверхностей вращения; она называется гиперболическим параболоидом. Эта поверхность по своему виду напоминает седло (черт. 22). Она имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, которые пересекают поверхность по параболам. Так же, как и три исходные прямые, в этом случае все прямые каждого из двух семейств параллельны некоторой плоскости. Из рассмотрения поверхности непосредственно видно, что никакая плоскость не может пересечь эту поверхность по эллипсу, так как всякое плоское сечение должно простираться


Черт. 22.

в бесконечность. Поэтому невозможно получить гиперболический параболоид из поверхности вращения с помощью растяжения: ведь на всякой поверхности вращения расположены окружности, которые при растяжении переходят в эллипсы.

Мы здесь познакомились с новым способом построения поверхностей: берут подвижную прямую, которую заставляют передвигаться по некоторой направляющей, закрепленной в определенном положении в пространстве. Полученные таким образом поверхности называются *линейчатыми поверхностями*. Мы видим, что между девятью поверхностями второго порядка имеются шесть линейчатых, именно: три цилиндра, конус, однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид; последние две поверхности занимают исключительное положеиие: это единственные линейчатые поверхности, помимо плоскости, обладающие тем свойством, что через каждую их точку проходит более одной прямой.



Черт. 23а.

Черт. 23б.

Остальные три поверхности второго порядка — эллипсоид, эллиптический параболоид и двуполостный гиперболоид — не могут содержать прямых уже потому, что они не простираются в бесконечность непрерывно в двух противоположных направлениях.

Можно доказать поразительную теорему относительно двух семейств прямых, расположенных на однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде. Вообразим все прямые одной из этих поверхностей в виде жестких стержней, скрепленных в точках пересечения так, что они могут вращаться вокруг этих точек, но не скользить одна по другой. Казалось бы, что при таком скреплении стержни должны представлять жесткую конструкцию. На самом же деле эта конструкция подвижна (черт. 23а, б). Аналитическое обоснование подвижности этой конструкции дано в дополнении к настоящей главе.

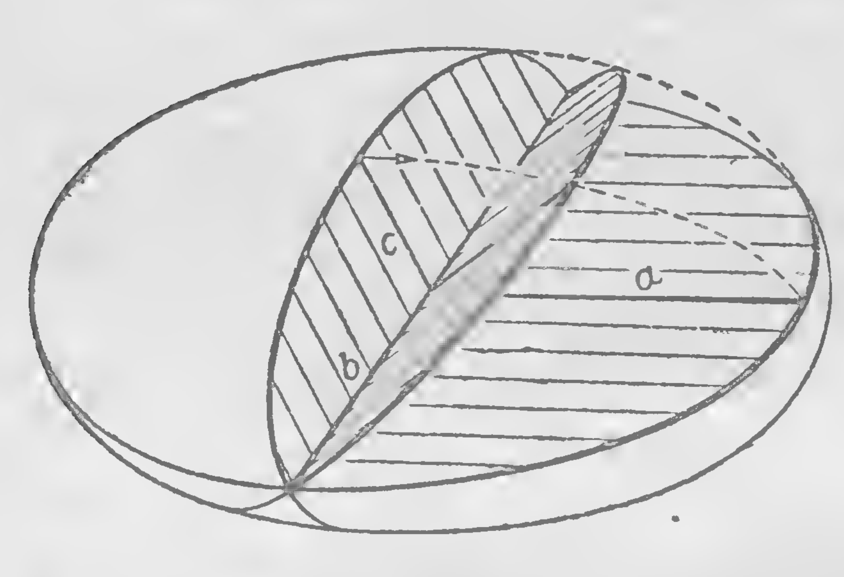
Для того чтобы представить себе изменение формы гиперболоида, которое при этом происходит, вообразим, что плоскость симметрии гиперболоида, пересекающая его по эллипсу, закреплена неподвижно в горизонтальном положении, и постараемся деформировать нашу конструкцию таким образом, чтобы эта плоскость все время оставалась плоскостью симметрии. Так как однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид единственные поверхности, у которых через каждую точку проходят две прямые, лежащие на поверхности, то наша стержневая модель, деформируясь, может либо перейти в гиперболический параболоид, либо остаться однополостным гиперболоидом; можно показать, что имеет место последний случай. Мы можем попытаться поднимать прямые нашей конструкции все круче по отношению к плоскости симметрии. Тогда мы будем получать поверхности, все более сплющенные; эллипсы, расположенные в плоскости симметрии, будут принимать вид софокусных эллипсов семейства, приведенного в § 1, становясь все более сжатыми. Наконец в пределе наша конструкция совпадет с вертикальной плоскостью, а стержни превратятся в касательные к некоторой гиперболе, расположенной в этой плоскости. Эллипс, расположенный в горизонтальной плоскости симметрии, выродится в дважды покрытый прямолинейный отрезок. Точно так же мы можем деформировать первоначальную модель в обратном направлении, все больше наклоняя стержни, приближая их к горизонтальной плоскости. При этом горловой эллипс поверхности будет все более резко обозначаться; в пределе наша конструкция совпадет с горизонтальной плоскостью симметрии, а стержни сделаются огибающими эллипса, лежащего в этой плоскости.

В случае гиперболического параболоида имеем аналогичное явление: соответствующая конструкция постоянно сохраняет форму параболоида и в обоих предельных случаях совпадает с некоторой плоскостью, причем прямые превращаются в огибающие некоторой параболы.

Поверхности второго порядка можно разбить на два вида еще с одной новой точки зрения. Три поверхности второго порядка — именно гиперболический и параболический цилиндры и гиперболический параболоид — не могут пересекаться с какой бы то ни было плоскостью по окружности, так как любое плоское сечение этих поверхностей простирается в бесконечность. Наоборот, можно доказать, что на остальных шести поверхностях всегда расположено бесчисленное множество окружностей. С этим связано то обстоятельство, что эти поверхности в противоположность первым трем могут быть присоединены к группе поверхностей вращения.

Для того чтобы убедиться в существовании круговых сечений, рассмотрим трехосный эллипсоид (черт. 24). Эта поверхность в пересечении со всеми плоскостями, проходящими через среднюю ось b, образует эллипсы, у которых одна ось постоянна, а именно равна b. Если мы возьмем плоскость, проходящую через ось b и через малую ось c, и станем вращать ее вокруг оси b до совпадения с плоскостью, проходящей через ось b и через большую ось a, то будем получать в пересечении с поверхностью эллипсы, у которых вторая ось сначала будет меньше оси b, а затем больше b. Значит, должно быть какое-то промежуточное положение плоскости, при котором обе оси эллипса равны, и следовательно, кривая, получающаяся в сечении, обращается в окружность.

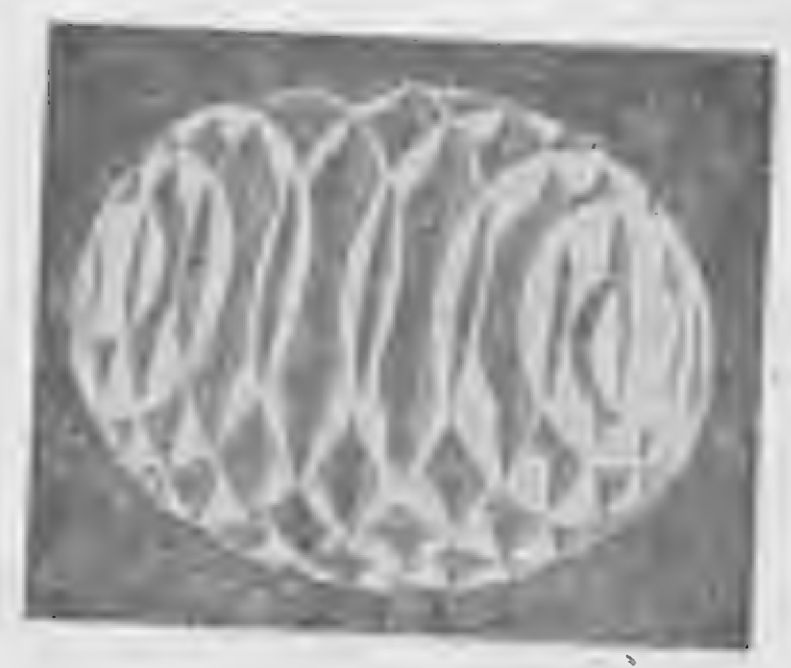
Вследствие симметрии эллипсоида мы получим путем зеркального отражения в плоскости, проходящей через b и c, еще одну плоскость, проходящую через b и дающую в пересечении с эллипсоидом окружность. Далее можно доказать, что всякое сечение эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости одного из круговых сечений, также представляет окружность. Таким образом на всяком эллипсоиде имеются два семейства параллельных окружностей (черт. 25а, б). В случае эллипсоида вращения оба семейства окружностей совпадают.



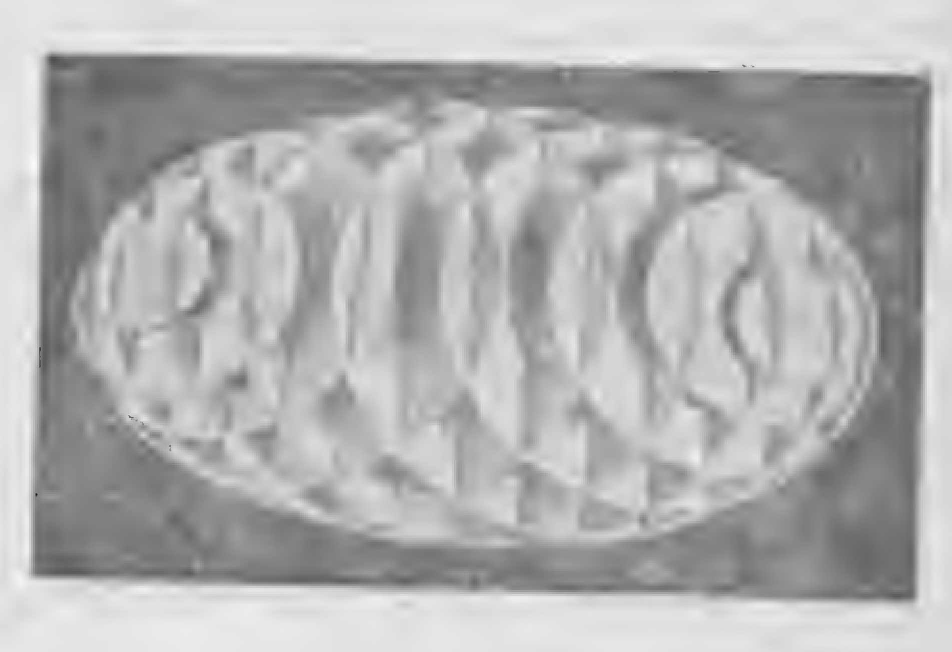
Черт. 24.

Так же, как для эллипсоида, можно провести подобное же рассуждение и для других поверхностей второго порядка, которые имеют замкнутые плоские сечения.

Для двух семейств круговых сечений имеет место предложение, аналогичное предложению относительно прямых, расположенных на однополостном гиперболоиде. Именно, если закрепить все окружности в точках пересечения так, чтобы они могли вращаться без скольжения вокруг этих точек, то полученная конструкция будет не жесткой, а подвижной



Черт. 25а.



Черт. 25б.

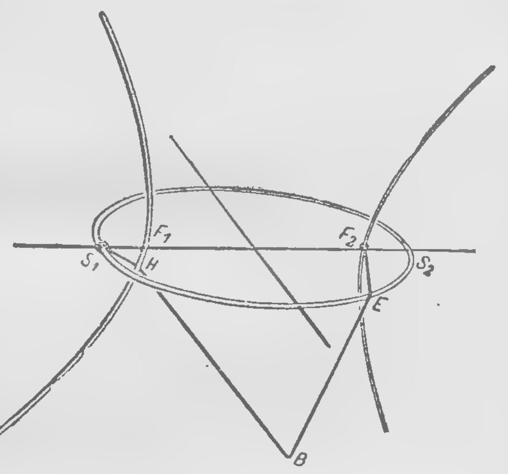
(черт. 25а, б; круги сделаны из картона с соответствующими прорезями и вставлены друг в друга; читатель может убедиться, что такая модель лишь незначительно уклоняется от нашего описания).

При изменении формы подвижной модели, составленной из круговых сечений, возникают не те семейства поверхностей, которые получались в случае стержневой модели; конические сечения, расположенные в плоскостях симметрии, при этом вообще не пробегают кривых некоторого софокусного семейства. Так, подвижная модель круговых сечений трехосного эллипсоида всегда может быть превращена в шар; в этом случае сечение с каждой плоскостью симметрии дает окружность, между тем как в случае семейства софокусных эллипсов эллипс никогда не вырождается в окружность.

Так же, как в случае стержневой модели, подвижность модели из круговых сечений допускает изменение формы модели вплоть до того, что поверхность переходит в дважды покрытый эллипс.

Несмотря на большое различие между обоими видами моделей, имеется переходный случай, связывающий ту и другую модель. Именно, можно рассматривать подвижную стержневую модель гиперболического параболоида как предельный случай модели, составленной из круговых сечений, когда радиусы кругов бесконечно велики, т. е. круги превратились в прямые. Если имеется семейство однополостных гиперболоидов, которые, изменяясь все больше, приближаются по виду к гиперболическому параболоиду, то окружности, расположенные на гиперболоиде, так же, как и прямые, переходят в семейство прямых параболоида.

4. Построение эллипсоида и софокусных поверхностей второго порядка при помощи нити. Поверхности второго порядка играют в пространстве роль, аналогичную роли конических сечений на плоскости. Естественно возникает вопрос, нельзя ли перенести на эти поверхности способ построения при помощи нити, употребляемый для вычерчивания эллипса. Этот вопрос был разрешен положительно для эллипсоида в 1882 г. Штауде (Staude), который указал способ построения эллипсоида при помощи нити. В этом построении в основу кладется жесткая конструкция, состоящая из эллипса и гиперболы, причем плоскость гиперболы перпендикулярна к плоскости эллипса и содержит большую ось последнего (черт. 26); фокусы эллипса F_1, F_2 являются вершинами гиперболы, а вершины эллипса S_1, S_2 — фокусами гиперболы; эти данные однозначно определяют гиперболу.

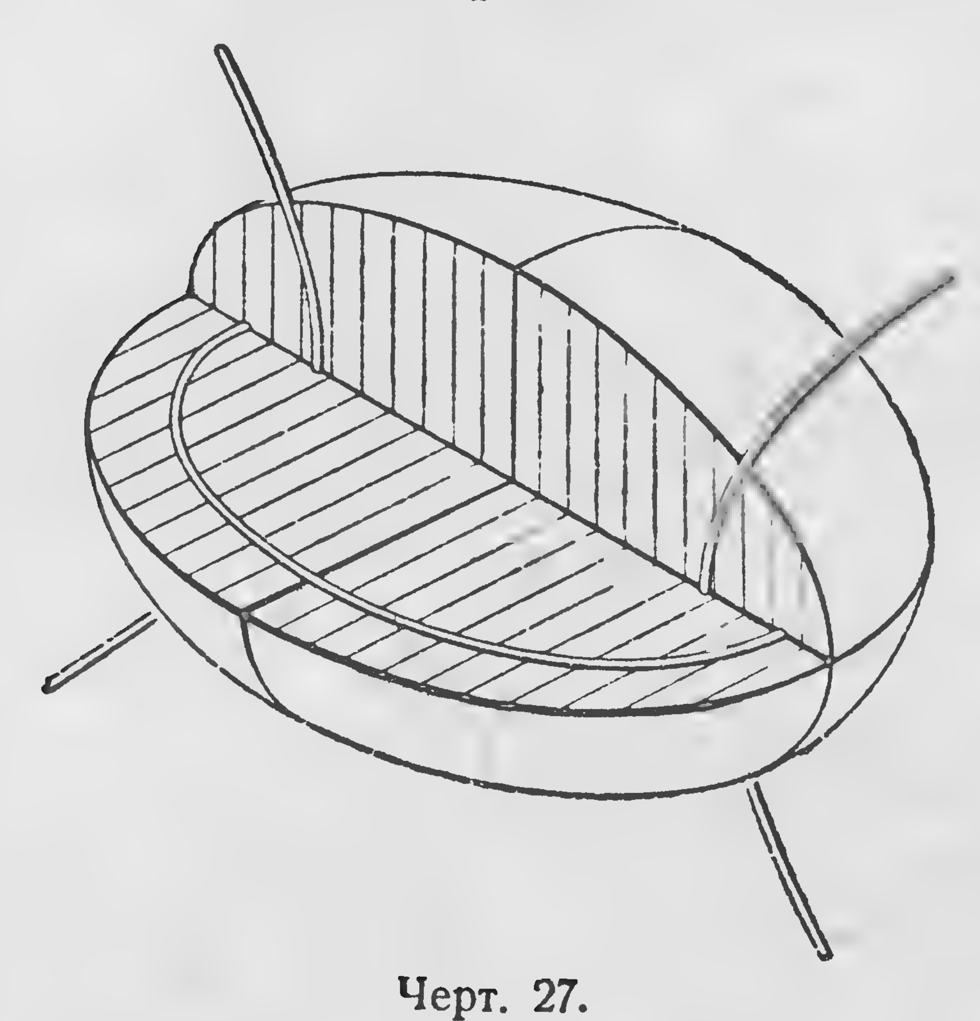


Черт. 26.

Закрепим конец нити в одной из вершин эллипса, например в S_1; затем обогнем снизу (т. е. под плоскостью эллипса) нитью ближайшую к точке S_1 ветвь гиперболы, выведем нить вперед и, обогнув спереди эллипс, выведем нить на верхнюю сторону плоскости эллипса; наконец закрепим другой конец нити в точке F_2. Если теперь натянуть в точке B отрезок нити, заключенный между эллипсом и гиперболой, то нить примет форму ломаной S_1HBEF_2, причем отрезок BHS_1 ломаной есть кратчайший путь, соединяющий B с S_1 и проходящий через точку гиперболы, а отрезок BEF_2 обладает таким же свойством в отношении точек B и F_2 и точки эллипса.

Если теперь изменять положение точки B, оставляя нить натянутой, то точка B будет перемещаться по поверхности эллипсоида. При таком закреплении нити, какое указано на черт. 26, точка B опи-

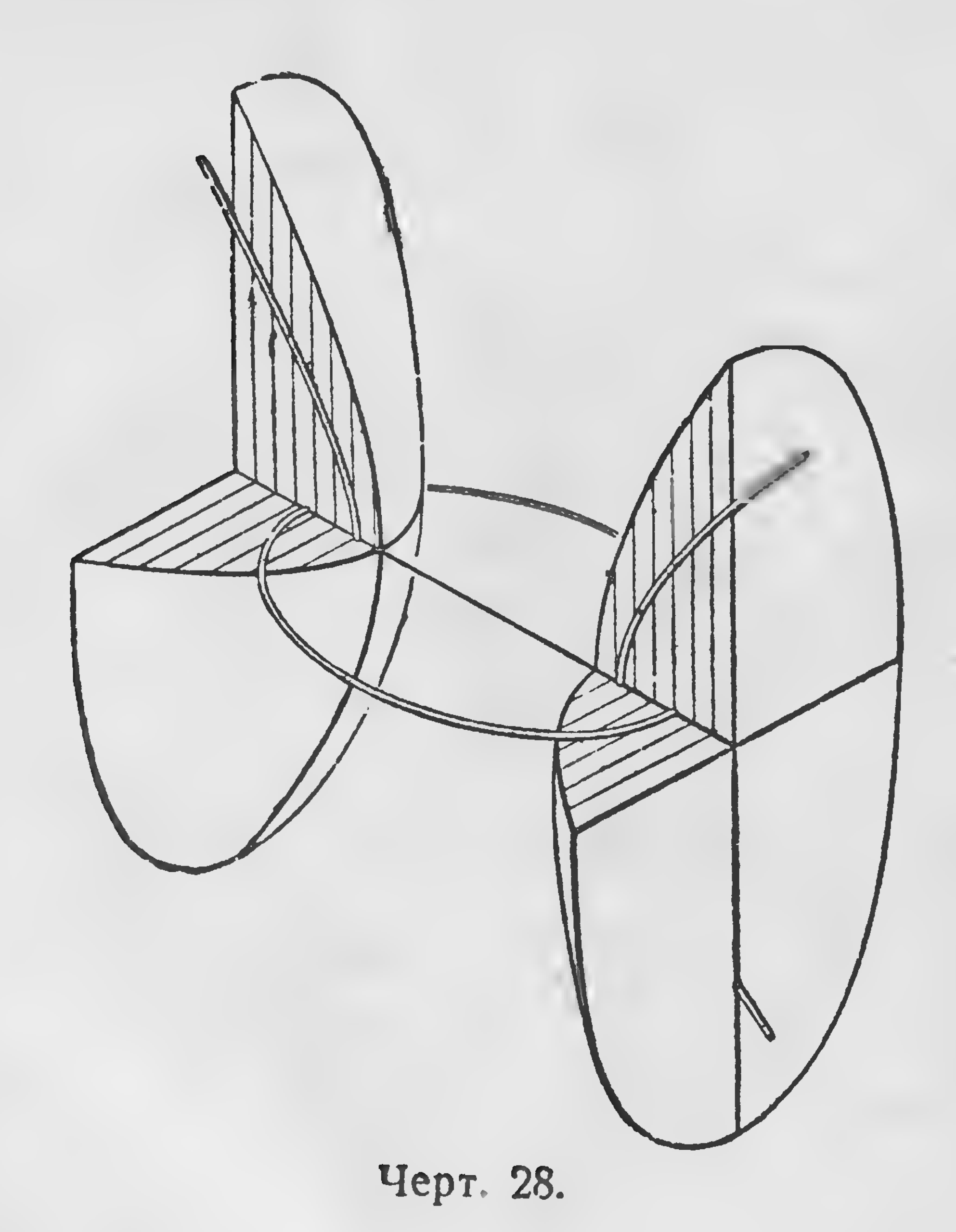
шет всю переднюю нижнюю четверть эллипсоида, остальные три четверти будут получаться в зависимости от того, каким образом нить, закрепленная в точках S_1 и F_2, огибает между этими точками эллипс и гиперболу [1]).



Черт. 27.

Конструкция из двух конических сечений при построении эллипсоида играет роль, аналогичную роли фокусов при построении эллипса. В связи с этим сами кривые называются фокальными кривыми (фокальный эллипс и фокальная гипербола) эллипсоида. Вообще говорят, что поверхность второго порядка имеет оба эти конические сечения в качестве фокальных кривых, если плоскости последних служат плоскостями симметрии поверхности и образуют в сечении с поверхностью кривые второго порядка, софокусные с фокальными кривыми.

Так как каждое из этих сечений (эллипсоида или гиперболоида) должно представлять собой либо эллипс, либо гиперболу, то следует различать четыре случая. Если оба сечения — эллипсы, то мы имеем эллипсоид (черт. 27). Если же оба сечения — гиперболы, то в этом случае у нас двуполостный гиперболоид (черт. 28). Если плоскость фокальной гиперболы пересекается с поверхностью по гиперболе, а плоскость фокального эллипса — по эллипсу, то наша поверхность представляет собой однополостный гиперболоид (черт. 29). Четвертый мыслимый случай — эллипс в плоскости гиперболы и гипербола в плоскости эллипса — исключается, ибо в этом случае эллипс и гипербола должны были бы пересекаться с прямой F_1F_2 в четырех различных точках E_1, E_2, H_1, H_2 (черт. 30), и плоскость фокальной гиперболы имела бы с по-

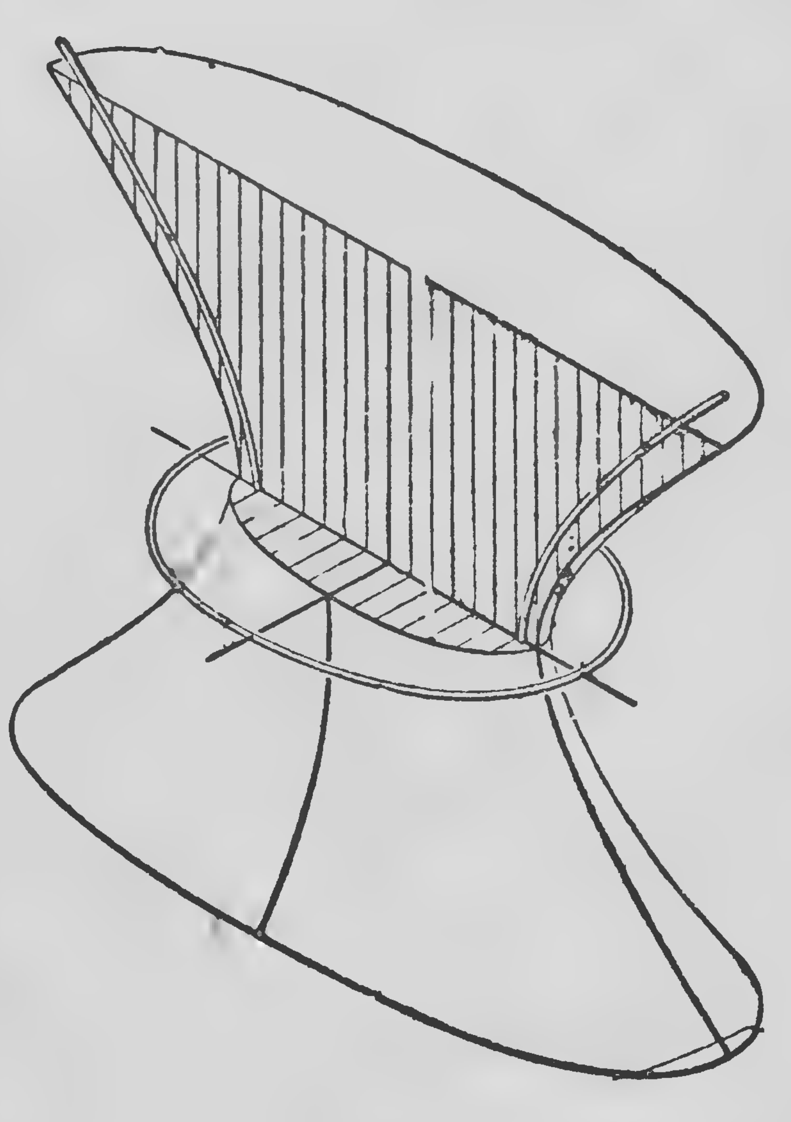


Черт. 28.

1) Вместо точек S_1 и F_2 концы нити можно было бы закрепить и в любых других точках эллипса или гиперболы за исключением только тех случаев, когда невозможно натянуть отрезок нити описанным образом между точками закрепления.

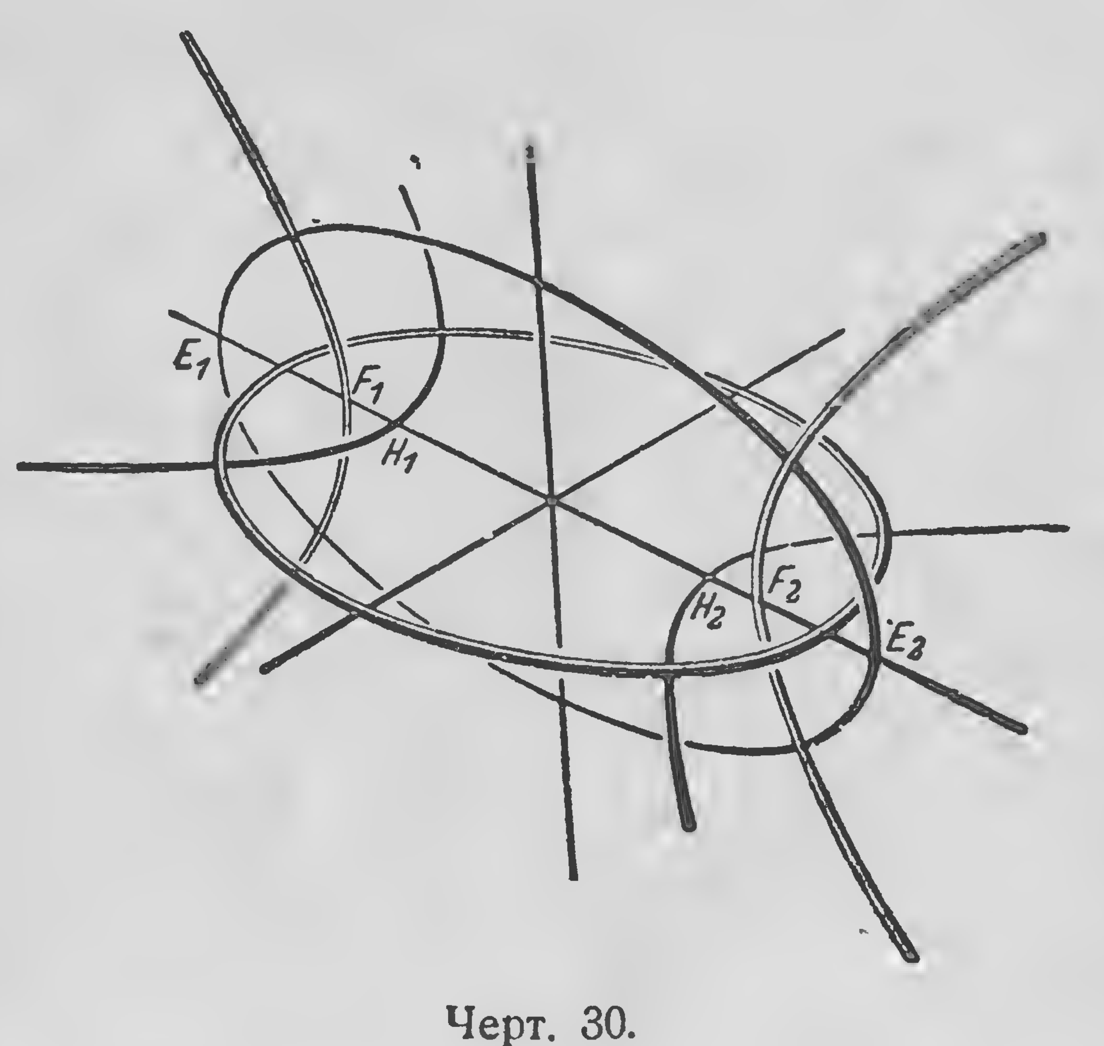
верхностью помимо эллипса, получающегося в сечении, еще две общих точки H_1 и H_2, лежащих вне эллипса, что противоречит определению поверхности второго порядка.

Если при построении эллипсоида при помощи нити закрепить фокальные кривые, но пользоваться нитями различной длины, то можно таким образом получить семейство «софокусных» эллипсоидов (т. е. эллипсоидов с общими фокальными кривыми), совокупность которых заполняет пространство однократно и непрерывно. Точно так же семейства однополостных и двуполостных гиперболоидов, принадлежащие к этим же фокальным кривым, каждое в отдельности, заполняют пространство непрерывно и однократно; таким образом через каждую точку пространства проходят один эллипсоид, один однополостный и один двуполостный гиперболоиды (черт. 31).



Черт. 29.

Точно так же, как софокусные конические сечения на плоскости, софокусные поверхности второго порядка пересекаются в пространстве ортогонально, т. е. в каждой точке пространства касательные плоскости к трем поверхностям, проходящим через эту точку, взаимно перпендикулярны [1]. Подобные тройные ортогональные системы поверхностей — и прежде всего система софокусных поверхностей второго порядка — играют роль в целом ряде математических и физических исследований; применение «эллиптических координат», к которым привело аналитическое представление этих поверхностей, оказалось целесообразным и при исследовании многих других, в частности астрономических, проблем.



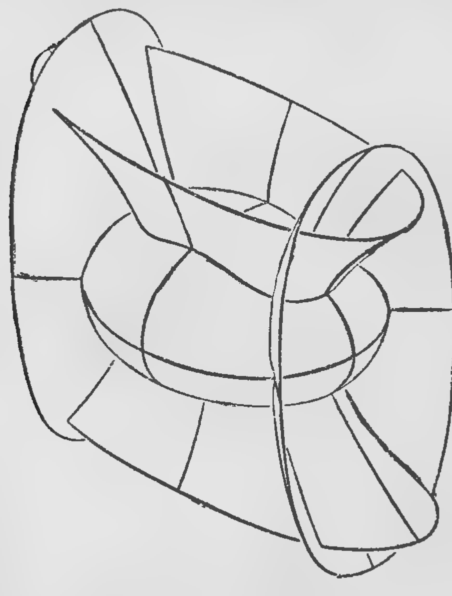
Черт. 30.

Можно получить представление о строении системы софокусных поверхностей второго порядка, если про-

[1]) Точки фокальных кривых составляют при этом исключение; в этих точках две из трех плоскостей становятся неопределенными. См. ниже.

следить за различными поверхностями в определенной последовательности. Будем исходить от весьма больших эллипсоидов семейства, имеющих приблизительно форму шара. Затем будем постепенно укорачивать большую ось; при этом эллипсоиды будут все более сплющиваться и все меньше напоминать по форме шар, ибо они будут различным образом сжиматься в направлении трех осей. В конце концов, как предельный случай, мы получим внутренность фокального эллипса, покрытую дважды.

Отсюда мы сразу скачком переходим к внешней части эллипса, которую также следует представлять себе дважды покрытой и которая представляет предельный случай сплющенного однополостного гиперболоида. Если мы будем, исходя от этого предельного случая и делая гиперболоиды все более крутыми, следить за семейством этих гиперболоидов, то мы будем все ближе подходить с обеих сторон к плоскости фокальной гиперболы, а эллипсы в горловине гиперболоидов, оставаясь все время софокусными, будут становиться все более узкими. В конце концов, когда горловой эллипс станет бесконечно узким, т. е. обратится в двойной прямолинейный отрезок, гиперболоид превратится в дважды покрытую плоскую полосу между ветвями фокальной гиперболы [1]. Теперь снова скачком переходим на другую сторону фокальной гиперболы, которую опять-таки следует представлять дважды покрытой. Это есть предельный случай для сжимающегося двуполостного гиперболоида. Если мы будем постепенно выпучивать обе полости гиперболоида, то они будут все более приближаться с обеих сторон к плоскости, проходящей через центр фокальных кривых и расположенной перпендикулярно к плоскостям обеих кривых. В предельном случае мы получим эту плоскость, опять-таки дважды покрытую. Этим мы полностью исчерпали всю систему софокусных поверхностей, причем наше рассмотрение показало нам, каким образом каждое семейство заполняет пространство однократно и непрерывно.



Черт. 31.

Связь между фокальными кривыми, а также связь этих кривых с соответствующими поверхностями второго порядка можно обнаружить с помощью еще одного свойства. Если мы будем рассматривать фокальный эллипс из какой-нибудь точки фокальной гиперболы в направлении ее касательной, то эллипс представится в виде круга, в центр которого

---

[1]) Приведенная выше подвижная стержневая модель пробегает как раз эту систему гиперболоидов, включая и предельные положения.

направлен наш взгляд. Следовательно, фокальная гипербола представляет геометрическое место вершин круговых конусов, которые можно провести через эллипс, причем осью вращения каждого такого конуса служит касательная к фокальной гиперболе в вершине конуса. Точно так же все конусы, образуемые касательными к эллипсоидам, софокусным с данными фокальными кривыми, проведенными из точек фокальной гиперболы, расположенных вне эллипсоида, являются круговыми конусами и притом с теми же осями, что и в первом случае.

Вообще можно доказать, что любая поверхность софокусной системы, рассматриваемая из точек фокальной кривой, расположенных вне поверхности, представляется в виде круга, причем если смотреть по направлению касательной к фокальной кривой, то взгляд будет направлен в центр круга. (При этом конус, образуемый касательными, может соприкасаться с поверхностью, вообще говоря, и не по окружности, а по любому коническому сечению, в том числе и по гиперболе [1]).)

Естественно возникает мысль рассмотреть наряду с фокальными кривыми также и те кривые, по которым пересекаются две различного вида поверхности софокусной системы. Такие кривые обладают одним простым дифференциально-геометрическим свойством, которое будет указано ниже (§ 28). Далее, эти кривые дают первый пример кривых, не лежащих в одной плоскости. Легко видеть, что кривая, по которой пересекаются две произвольных как угодно расположенных поверхности второго порядка, не может пересечься с любой плоскостью более чем в четырех точках, если только кривая не имеет дуги, целиком расположенной на плоскости. В самом деле, всякая плоскость дает в пересечении с этими поверхностями два конических сечения; и легко аналитическим путем доказать (что, впрочем, и непосредственно очевидно), что два конических сечения пересекаются не более чем в четырех точках, если только они не совпадают или не имеют общей прямой (§ 24).

С этим свойством, относящимся к точкам пересечения, связано то обстоятельство, что рассматриваемые кривые по аналитическим соображениям называются кривыми четвертого порядка. (Кривые n-го порядка обладают аналогичным свойством, а именно, они имеют с любой плоскостью не более n общих точек, либо имеют с ней общую дугу кривой). Однако существуют и такие кривые четвертого порядка, которых нельзя получить пересечением двух поверхностей второго порядка [2]) Пространственные кривые более высокого порядка трудно представить без вспомогательных аналитических средств, а потому они здесь и не рассматриваются.

---

[1]) Софокусные системы обладают еще одним свойством, которое, впрочем, можно рассматривать как предельный случай только что упомянутых свойств. Свойство это заключается в следующем: если из какой-нибудь точки P пространства провести конус касательных к некоторой поверхности системы, не заключающей внутри себя взятой точки P, то касательные плоскости в точке P к трем проходящим через эту точку поверхностям системы всегда представляют плоскости симметрии конуса касательных.

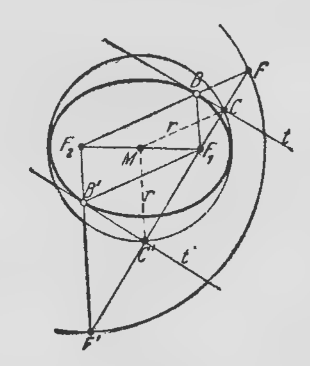
[2]) Можно аналитически доказать для кривых пересечения двух поверхностей второго порядка, что через них проходит бесчисленное множество других поверхностей второго порядка и между ними четыре конуса (причем из них некоторые могут совпадать или вырождаться в цилиндры).

ДОБАВЛЕНИЯ К ГЛАВЕ ПЕРВОЙ

1. Построение конического сечения при помощи подэры. Пусть даны кривая K и точка F_1 (черт. 32); будем опускать из точки F_1 перпендикуляры на все касательные t к кривой K. Тогда основания этих перпендикуляров опишут новую кривую k, которая называется подэрной кривой или подэрой для кривой K относительно точки F_1. Обратно, можно получить снова кривую K, если даны F_1 и k. Для этого достаточно соединить F_1 со всеми точками кривой k и восставить перпендикуляры t к полученным прямым во всех точках кривой k. Тогда прямые t будут огибающими кривой K. Этот последний способ построения мы будем называть построением с помощью подэрной кривой и будем говорить, что кривая K получается построением при помощи подэры



Черт. 32.



Черт. 33.

(относительно точки F_1) из кривой k. В зависимости от выбора точки F_1 построением при помощи подэрной кривой можно из одной и той же кривой k получить весьма разнообразные кривые K.

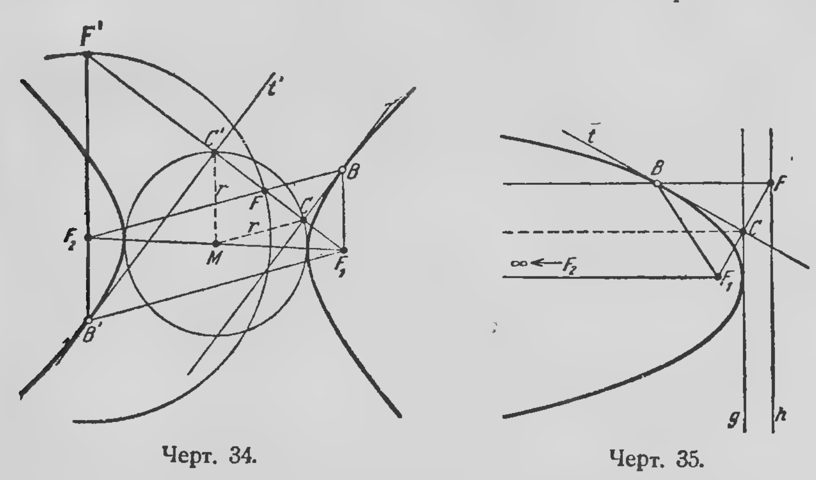
Мы утверждаем: построением при помощи подэры из круга или из прямой всегда получается коническое сечение. Если точка F_1 расположена внутри круга с центром в точке M (черт. 33), то получается эллипс, причем F_1 есть один из его фокусов; второй фокус F_2 есть зеркальное отражение точки F_1 относительно центра M. Если точка F_1 лежит вне круга, то получается гипербола (черт. 34). Фокусами ее опять являются точка F_1 и ее зеркальное отражение относительно точки M. Если вместо круга взять прямую g, то получается парабола (черт. 35). Фокусом ее служит точка F_1, а директрисой — прямая h, параллельная и расположенная по другую сторону от прямой g на таком же расстоянии от нее, что и точка F_1.

Чтобы доказать наше утверждение прежде всего для эллипса, проведем через точку F_1 произвольную прямую (черт. 33); пусть она пересекает круг в точках C и C'. На этой прямой возьмем точки F и F' так, чтобы $F_1C = CF$ и $F_1C' = C'F'$. Далее, восставим к прямой CC' в точках C и C' перпендикуляры t и t'. Возьмем точку F_2 так, чтобы точка M была серединой отрезка F_1F_2. Пусть прямая F_2F пересекает t в

точке B, а прямая F_2F' пересекает t' в точке B'. Тогда $F_1B = FB$ и, следовательно, $F_1B + BF_2 = FF_2$. Но так как точки M и C суть середины отрезков F_1F_2 и F_1F, то имеем: $FF_2 = 2CM$. Обозначив радиус круга через r, получаем соотношение:

$$BF_1 + BF_2 = 2r.$$

Следовательно, точка B лежит на эллипсе с фокусами в точках F_1 и F_2 и с большой осью $2r$. Остается еще показать, что прямая t касается эллипса в точке B. Это следует из показанного на стр. 10 свойства



Черт. 34. Черт. 35.

углов, образуемых касательной к эллипсу с его радиусами-векторами, проведенными в точку касания. Именно, у нас по построению $\sphericalangle CBF_1 = \sphericalangle CBF$. Взяв точки B', C' и F', мы проведем совершенно аналогично доказательства для прямой t'.

Доказательство для гиперболы можно усмотреть из черт. 34. Построение на этом чертеже отличается от черт. 33 только тем, что точка F_1 взята вне круга. В этом случае точки B и B' описывают две различные ветви гиперболы. Здесь мы имеем:

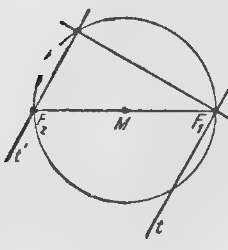
$$F_1F_2 = 2r = BF_2 - BF_1 \quad \text{и} \quad F'F_2 = 2r = B'F_1 - B'F_2.$$

Для параболы приходится несколько гидоизменить доказательство. Именно, если в этом случае точки C и F и прямая t (черт. 35) построены аналогично предыдущим двум построениям, то нужно опустить перпендикуляр из точки F на прямую g. Пусть B есть точка пересечения этого перпендикуляра с прямой t. Тогда будем иметь: $BF_1 = BF$. Но здесь точка F описывает прямую h, построенную так, как было указано выше [1]).

[1]) В случаях построения эллипса и гиперболы точка F описывает окружность с центром в F_2 вдвое большую, чем взятая первоначально окружность; их центр подобия лежит в точке F_1. Это следует из условий:

$$FF_2 = 2CM \quad \text{и} \quad FF_1 = 2CF_1.$$

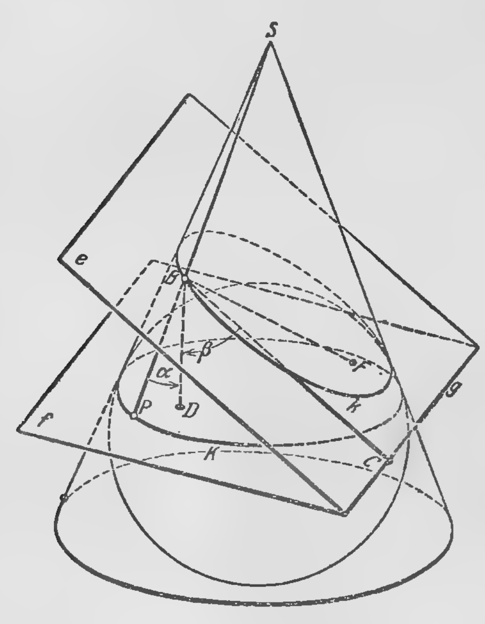
Следовательно, точка B действительно описывает параболу с фокусом в точке F_1 и директрисой h. Что и в этом случае прямая t касается параболы в точке B, следует опять из того, что прямая t делит пополам угол FBF_1 [1]).



Черт. 36.

Если точка F_1 находится на самой окружности (черт. 36), то прямые t и t' вращаются вокруг точек F_1 и F_2, и мы получаем в этом случае два пучка прямых. Как известно, случай такого вырождения получается, естественно, если кривые второго порядка рассматривать как огибающую касательных.

2. Директрисы конических сечений. Мы определили параболу как геометрическое место точек, равноотстоящих от неподвижной точки F, фокуса, и от неподвижной прямой g, директрисы. Аналогичное определение можно дать для эллипса и для гиперболы. Будем искать геометрическое место точек, для которых отношение их расстояния от некоторой неподвижной точки F к расстоянию от определенной неподвижной прямой g есть постоянная величина v. В случае параболы $v=1$. Докажем теперь, что если $v<1$, то искомая кривая есть эллипс, а если $v>1$, то — гипербола. При этом точка F есть фокус конического сечения. Обратно, для каждого эллипса и каждой гиперболы можно подобрать две прямые g_1 и g_2 так, что для каждой точки кривой отношение расстояний ее от F_1 и g_1 и соответственно от F_2 и g_2 будет постоянным.



Черт. 37.

Для доказательства обратимся к черт. 37. Круговой конус пересекается с плоскостью e по некоторому эллипсу k, который и послужит нам для проверки нашего утверждения. Так же, как на черт. 10, возьмем вспомогательный шар, соприкасающийся с конусом по окружности K и касающийся плоскости в точке F; следовательно, F есть фокус эллипса k. Далее, пусть f — плоскость круга K и g — линия пересечения плоскостей e и f. Из произвольной точки B эллипса опустим перпендикуляр BC на

---

[1]) Можно, конечно, получить черт. 35 из черт. 33 таким же предельным переходом, при помощи которого мы получали параболу из эллипса на стр. 11.

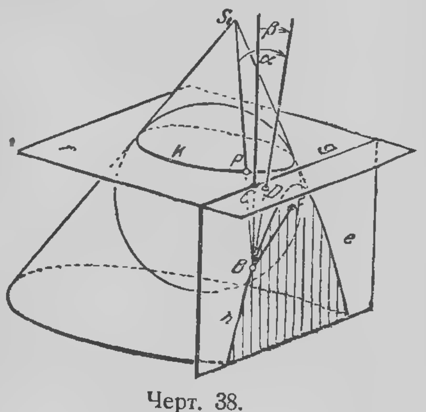
прямую g и перпендикуляр BD на плоскость f. Затем соединим точку B с точкой F и с вершиной S конуса; пусть прямая BS пересекается с кругом K в точке P. Положим для краткости: $\angle DBP = \alpha$ и $\angle DBC = \beta$. Тогда будем иметь: $BC = \frac{BD}{\cos \beta}$ и $BP = \frac{BD}{\cos \alpha}$. Далее, $BF = BP$, ибо оба отрезка представляют собой касательные, проведенные из точки B к одному и тому же шару.

Следовательно:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BP}{BC} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Но углы α и β не зависят от выбора точки B, так как угол α равен половине угла при вершине конуса, а угол β есть угол наклона плоскости e к оси конуса. Значит, если мы положим $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = v$, то убедимся в правильности нашего утверждения для эллипса k, причем мы попутно получаем пространственный способ построения директрисы g.

Если плоскость e пересекается с конусом не по эллипсу, а по гиперболе h (черт. 38), доказательство можно провести совершенно аналогично, только в первом случае $\alpha < \beta$, а во втором $\alpha > \beta$, и следовательно, для эллипса имеем $v < 1$, а для гиперболы, наоборот, $v > 1$.



Черт. 38.

Правда, наше построение доказывает существование директрисы только для определенных эллипсов и гипербол, между тем как в нашем утверждении задавались, наоборот, точка F, прямая g и число v и требовалось найти соответствующую кривую. Но, очевидно, вид искомой кривой зависит только от значения числа v, и в то же время мы можем провести построение так, чтобы углы α и β, а следовательно, и v принимали любые значения. Таким образом наше построение исчерпывает всевозможные формы искомой кривой, и значит, кривая, в самом деле, всегда должна представлять коническое сечение.

В случае, когда $\alpha = \beta$, т. е. $v = 1$, мы получаем параболу, так что мы снова приходим к первоначальному определению.

Если же плоскость e пересекает конус по кругу, то наше построение ничего не дает, ибо в этом случае (и только в этом) плоскости e и f не пересекаются, а параллельны. Всякое собственное коническое сечение, отличное от круга, можно представить как сечение кругового конуса и затем применить к нему наше построение. Поэтому свойство директрис присуще всем собственным коническим сечениям за исключением круга.

В частности, греческие названия конических сечений основываются на их отношении к директрисам. Они обозначают, что v у эллипса не достигает числа 1 (ἐλλείπειν), у гиперболы превосходит 1 (ὑπερβάλλειν) и у параболы в точности равно 1 (παραβάλλειν).

3. Подвижная стержневая модель гиперболоида. В настоящем параграфе, предполагая известными основы аналитической геометрии в пространстве, мы докажем высказанное в § 3 утверждение, что стержневая модель однополостного гиперболоида подвижна. Вместе с тем мы покажем, что эта конструкция, изменяясь, принимает положения софокусных однополостных гиперболоидов.

Пусть x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 суть пространственные декартовы координаты точек P и Q соответственно. Рассмотрим софокусные поверхности второго порядка:

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}=\sum_1^3\frac{x_i^2}{a_i-\lambda}=1. \qquad (1)$$

Выберем определенное значение λ так, чтобы уравнение (1) определяло некоторый однополостный гиперболоид. Точка P должна лежать на этой поверхности, как это следует из выражения (1). Пусть точка Q есть другая точка той же самой поверхности, которая принадлежит той же прямой, расположенной на взятой поверхности, что и точка P. Это требование равносильно тому, чтобы удовлетворялись уравнения:

$$\sum_1^3\frac{y_i^2}{a_i-\lambda}=1, \qquad (2)$$

$$\sum_1^3\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}=1. \qquad (3)$$

В самом деле, середина M отрезка PQ должна также лежать на поверхности. Точка M имеет координаты $\frac{1}{2}(x_i+y_i)$. Следовательно, мы должны иметь:

$$\sum\frac{1}{4}\frac{(x_i+y_i)^2}{a_i-\lambda}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}=1.$$

А это равносильно уравнению (3). Обратно: прямая PQ целиком совпадает с поверхностью, когда она имеет с поверхностью три общих точки P, Q и M, т. е. когда удовлетворяются соотношения (1), (2) и (3).

Вычислим теперь расстояние $PQ=r$.

Имеем:

$$r^2=\sum_1^3(x_i-y_i)^2=\sum x_i^2+\sum y_i^2-2\sum x_iy_i=$$
$$=\sum(a_i-\lambda)\frac{x_i^2}{a_i-\lambda}+\sum(a_i-\lambda)\frac{y_i^2}{a_i-\lambda}-2\sum(a_i-\lambda)\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}=$$
$$=\sum a_i\left[\frac{x_i^2}{a_i-\lambda}+\frac{y_i^2}{a_i-\lambda}-2\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}\right]-$$
$$-\lambda\left[\sum\frac{x_i^2}{a_i-\lambda}+\sum\frac{y_i^2}{a_i-\lambda}-2\sum\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}\right].$$

Последнее выражение в квадратных скобках исчезает в силу уравнений (1), (2) и (3), и мы получаем:

$$r^2=\sum a_i\frac{(x_i-y_i)^2}{a_i-\lambda}. \qquad (4)$$

Пусть теперь в выражение (1) вместо λ подставлено значение λ', которое также определяет некоторый однополостный гиперболоид. Это имеет место тогда и только тогда, когда знаки разностей $a_i - \lambda$ и $a_i - \lambda'$ одинаковы для всякого i.

В соответствии с этим формулы

$$x'_i = x_i \sqrt{\frac{a_i - \lambda'}{a_i - \lambda}} \tag{5}$$

определяют действительное аффинное преобразование. Очевидно, преобразование (5) переводит поверхность (1) в однополостный гиперболоид, софокусный с (1); обозначим его через (1'). Если точки $P'(x'_i)$ и $Q'(y'_i)$ суть изображения точек P и Q, даваемые преобразованием (5), то прямая $P'Q'$ лежит целиком на поверхности (1'), ибо она представляет изображение прямой PQ. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что расстояние $P'Q' = r'$ осталось равным PQ, т. е. $r' = r$. Но для r' мы имеем формулу, аналогичную формуле (4):

$$r'^2 = \sum a_i \frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'}. \tag{4'}$$

Из (5) следует:

$$\frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'} = \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda} \quad (i = 1, 2, 3),$$

так что в силу (4) и (4') действительно имеем:

$$r = r'.$$

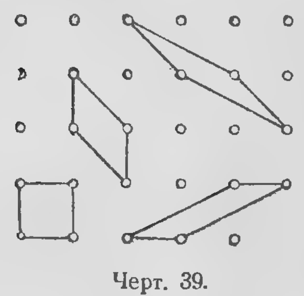
Если мы примем λ за постоянное, а λ' за переменное, то преобразование (5) даст нам кривые, описываемые точками стержневой модели, когда последняя деформируется, сохраняя свои плоскости симметрии. Эти кривые, как показывает простое вычисление, представляют кривые пересечения эллипсоида, софокусного с гиперболоидом (1), и двуполостного гиперболоида.

ВТОРАЯ ГЛАВА

ПРАВИЛЬНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ

В этой главе мы рассмотрим метрические свойства пространства с новой точки зрения. Если до сих пор мы имели дело с кривыми и поверхностями, т. е. с непрерывными образами, то теперь мы переходим к таким системам, которые построены из дискретных элементов. Такие системы встречаются часто в некоторых отделах математики, в частности в теории чисел и теории функций, а также в кристаллографии [1]).

5. Плоские точечные решетки. Чрезвычайно простую фигуру, состоящую из дискретных частиц, представляет плоская квадратная точечная решетка (черт. 39). Чтобы получить эту решетку, отметим на плоскости четыре вершины квадрата, площадь которого равна единице, затем сдвинем квадрат параллельно одной из его сторон на длину, равную стороне квадрата, и отметим две вновь получившиеся вершины. Представим себе, что этот процесс мы продолжаем до бесконечности сперва в одном направлении, а затем в противоположном. Таким образом мы получим на плоскости полосу, состоящую из двух рядов равноотстоящих точек. Сдвинем эту полосу в перпендикулярном к ней направлении на длину стороны квадрата, отметим вновь получившиеся точки и представим себе, что и этот процесс продолжен в обе стороны до бесконечности. Совокупность точек, отмеченных таким образом, образует квадратную точечную решетку; ее можно определить также как множество точек с целочисленными координатами в декартовой системе координат на плоскости.



Черт. 39.

В этой решетке можно образовать из четырех точек также и другие фигуры, а не только квадраты, например параллелограмы. Легко убедиться, что эту решетку можно построить, исходя не от квадрата, а от

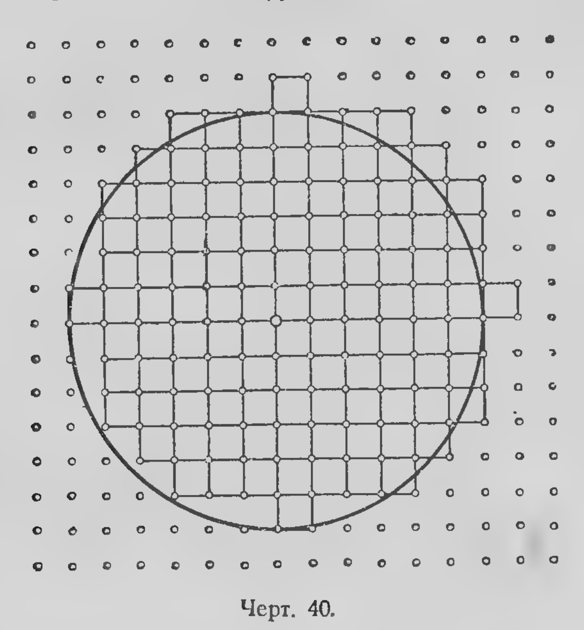
---

[1]) В той части дальнейших строк, которая касается кристаллографии, обозначения не всегда соответствуют употребительным кристаллографическим терминам. В пределах простого геометрического рассмотрения, которым мы ограничиваемся, принятые здесь названия часто короче и выразительнее.

Желающим познакомиться более подробно с геометрической кристаллографией можно рекомендовать книгу: Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров, Математические основы структурного анализа кристаллов, ГТТИ, 1934.

параллелограма, если только параллелограм кроме своих вершин не содержит ни внутри себя, ни на сторонах никаких других точек решетки (в противном случае мы получили бы нашим построением не все точки решетки). Из рассмотрения каждого такого параллелограма можно видеть, что он имеет такую же площадь, как и исходный квадрат (черт. 39), строгое доказательство этого будет дано на стр. 38—39.

Уже эта простая решетка послужила исходным пунктом для важных математических исследований, первое из которых принадлежит Гауссу. Гаусс пытался определить число $f(r)$ точек решетки, расположенных на



Черт. 40.

площади круга радиуса r; при этом центр круга должен был быть точкой решетки, а r — целым числом.

Гаусс нашел эмпирически это число для многих значений r, например:

$r =$	10	$f(r) =$	317
	20		1 257
	30		2 821
	100		31 417
	200		125 629
	300		282 697

Рассмотрение функции $f(r)$ дает метод вычисления значения π. Так как каждый элементарный квадрат решетки имеет площадь, равную единице, то $f(r)$ равно площади F, составленной из всех тех элементарных квадратов, у которых левая нижняя вершина лежит внутри или на границе круга (черт. 40). Таким образом $f(r)$ отличается от площади

круга $r^2\pi$ не более чем на величину площади $A(r)$ тех добавленных или опущенных квадратов, которые пересекаются окружностью:

$$|f(r)-r^2\pi|\leqslant A(r),$$

$$\left|\frac{f(r)}{r^2}-\pi\right|\leqslant\frac{A(r)}{r^2}.$$

Для оценки $A(r)$ достаточны несложные выкладки. Наибольшее расстояние между двумя точками элементарного квадрата равно $\sqrt{2}$. Следовательно, все квадраты, пересекающиеся с окружностью, расположены в круговом кольце шириной $2\sqrt{2}$, внешний и внутренний радиусы которого равны $r+\sqrt{2}$ и $r-\sqrt{2}$. Площадь этого кругового кольца равна:

$$B(r)=[(r+\sqrt{2})^2-(r-\sqrt{2})^2]\pi=4\sqrt{2}\,r\pi.$$

Но $A(r)<B(r)$; следовательно:

$$\left|\frac{f(r)}{r^2}-\pi\right|<\frac{4\sqrt{2}\pi}{r}.$$

Отсюда при помощи предельного перехода получается искомая формула:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2}=\pi. \qquad (1)$$

Если подставить в эту формулу значения функции $f(r)$, найденные Гауссом, то получаются следующие приближения к $\pi=3{,}14159\ldots$:

$r=10$	$\pi=3{,}17$
$r=20$	$\pi=3{,}1425$
$r=30$	$\pi=3{,}134$
$r=100$	$\pi=3{,}1417$
$r=200$	$\pi=3{,}140725$
$r=300$	$\pi=3{,}14107$

Одним из применений формулы (1) служит доказательство утверждения, приведенного на стр. 37, что площадь каждого параллелограма, пользуясь которым можно построить квадратную точечную решетку, равна единице.

С этой целью для каждой точки решетки, попавшей в круг, указываем одним и тем же способом параллелограм, для которого она служит вершиной, и сравниваем площадь F, составленную из этих параллелограмов, с площадью круга. Здесь опять разность между обеими площадями меньше площади $B(r)$ кругового кольца, внешний и внутренний радиусы которого равны $r+c$ и $r-c$, где c есть наибольшее расстояние (не зависящее от r) между двумя точками элементарного парал-

лелограма. Если площадь последнего равна a, то площадь F равна $a \cdot f(r)$, и мы получаем формулу:

$$|af(r) - r^2\pi| < B(r) = 4rc\pi,$$

т. е. имеем:

$$\left|\frac{af(r)}{r^2} - \pi\right| < \frac{4\pi c}{r},$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \frac{\pi}{a}.$$

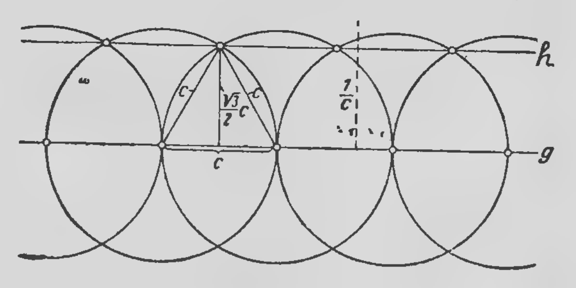
Но выше было доказано, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \pi.$$

Отсюда [1]) следует наше утверждение: $a = 1$.

Теперь обратимся к рассмотрению более общих «единичных решеток», т. е. решеток, которые можно образовать из произвольного параллелограма с площадью, равной единице, таким же образом, как квадратную решетку из квадрата. Здесь также различные параллелограмы могут образовать одну и ту же решетку, но для этого все они должны иметь площадь, равную единице; это можно доказать таким же способом, как для квадратной решетки.

Для каждой такой единичной решетки наименьшее расстояние c между двумя точками решетки есть характеристическая величина. Существуют единичные решетки со сколь угодно малым c, например такие, которые составлены из прямоугольников со сторонами c и $\frac{1}{c}$. Но, очевидно, c не может быть как угодно велико, иначе решетка не могла бы быть единичной. Значит c имеет верхнюю границу. Мы ее сейчас определим.



Черт. 41.

Пусть из произвольной единичной решетки выбраны две точки с кратчайшим расстоянием c между ними (черт. 41). Проведем через эти точки прямую g; тогда по определению решетки на этой прямой должны лежать другие точки на расстоянии c; точно так же прямая h, параллельная g и отстоящая от нее на расстояние $\frac{1}{c}$, должна содержать бесконечное множество точек решетки; наоборот, полоса, расположенная между этими прямыми, не должна содержать ни одной точки решетки; оба последних утверждения следуют из того, что наша решетка — единичная.

---

[1]) В этом доказательстве можно было взять вместо площади круга любую другую часть плоскости, границу которой можно покрыть полосами, сколь угодно узкими по сравнению со всей площадью.

Опишем теперь окружности радиуса c вокруг всех точек решетки, расположенных на прямой g. Совокупность этих кругов покрывает полосу, отграниченную от остальной плоскости дугами круга. Всякая точка внутри этой полосы расположена на расстоянии меньшем c по крайней мере от одной точки решетки и, значит, не может быть точкой решетки по определению. Следовательно, $\frac{1}{c}$ больше или равно кратчайшему расстоянию граничной линии полосы от g. Это расстояние, очевидно, есть высота равностороннего треугольника со стороной c; итак, мы имеем:

$$\frac{1}{c} \geqslant \frac{c}{2}\sqrt{3},$$

$$c \leqslant \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Число $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ есть искомая верхняя граница для c. Это экстремальное значение действительно достигается в некоторой решетке, а именно, как можно усмотреть из черт. 41, в решетке, у которой образующий параллелограм составлен из двух равносторонних треугольников.

Путем увеличения или уменьшения мы можем получить любую решетку из единичной решетки. Если a^2 есть площадь элементарного параллелограмма некоторой решетки, а C — наименьшее расстояние двух точек решетки, то имеем:

$$C \leqslant a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Знак равенства и в этом случае имеет место тогда и только тогда, когда решетка составлена из равносторонних треугольников. При *заданном* наименьшем расстоянии эта решетка имеет, следовательно, наименьший элементарный параллелограм. Но, как мы видели (стр. 37—38), площадь большой фигуры приближенно равна числу точек решетки внутри фигуры, помноженной на площадь элементарного параллелограма. Следовательно, из всех решеток с заданным наименьшим расстоянием, расположенных внутри некоторой данной большой площади, решетка, составленная из равносторонних треугольников, содержит наибольшее число точек.

Если описать вокруг всех точек решетки окружности радиуса, равного половине минимального расстояния точек решетки, то получим систему кругов, которые частично соприкасаются, но нигде не перекрываются. Систему окружностей, построенных таким образом, называют сетчатым (решетчатым) расположением кругов. Решетчатое расположение кругов считается тем более плотным, чем больше кругов помещается в заданной (достаточно большой) области. В соответствии с этим решетка, составленная из правильных треугольников, дает наиболее плотное расположение кругов (черт. 42).

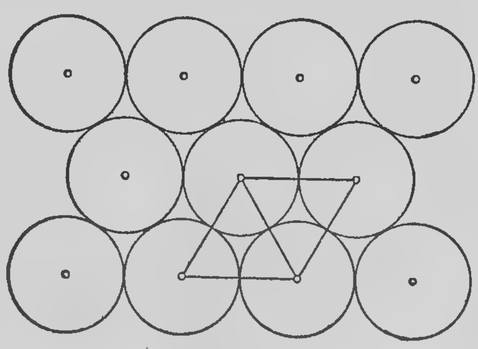
В качестве меры плотности расположения кругов примем частное от деления суммы площадей всех кругов расположения на площадь данной области. При достаточно больших областях это значение, очевидно, близко к частному от деления площади отдельного круга на

площадь элементарного параллелограма. Наибольшее значение плотности дает решетка правильных треугольников, именно:

$$D=\frac{1}{2\sqrt{3}}\pi=0{,}289\,\pi.$$

6. Плоские точечные решетки в теории чисел. Во многих проблемах теории чисел играют роль точечные решетки. Мы здесь приведем несколько примеров. Ради краткости изложения в этом параграфе мы будем предполагать у читателя несколько большую математическую подготовку, чем в других местах этой книги.

1. Ряд Лейбница: $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ Пусть $f(r)$, как и в § 5, обозначает число точек плоской квадратной единичной решетки внутри круга радиуса r с точкой решетки в центре. Примем центр круга за начало декартовой системы координат, в которой точки решетки будут точками с целочисленными координатами. Тогда $f(r)$ есть число всех пар целых чисел, x, y, для которых имеет место соотношение $x^2+y^2\leqslant r^2$. Но x^2+y^2 представляет всегда целое число n. Иными словами, мы получим $f(r)$, если найдем для всех целых чисел $n\leqslant r^2$, сколькими способами можно каждое из них представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, и затем сложим число этих способов для всех чисел. Здесь имеет место следующая теорема теории чисел: число разложений целого числа n на сумму квадратов двух целых чисел равно учетверенному избытку числа делителей числа n вида $4k+1$ над числом делителей вида $4k+3$. При этом такие разложения, как $n=a^2+b^2$, $n=b^2+a^2$, $n=(-a)^2+b^2$ и т. д., следует считать различными, так как этим разложениям соответствуют различные точки нашей решетки. Таким образом всякое разложение приводит к системе из восьми разложений (если не принимать во внимание особых случаев: $a=\pm b$, $a=0$, $b=0$). В качестве примера рассмотрим число $n=65$. Оно имеет четыре делителя 1, 5, 13, 65. Все эти делители имеют вид $4k+1$; делителей вида $4k+3$ нет. Таким образом указанный избыток в этом случае равен 4, и согласно нашей теореме число 65 должно разлагаться 16 различными способами на сумму двух квадратов (или, что то же самое, круг радиуса $\sqrt{65}$ с центром в начале координат должен захватывать 16 точек решетки). В самом деле, имеем:



Черт. 42.

$$65=1^2+8^2 \text{ и } 65=4^2+7^2,$$

причем каждое разложение нужно считать 8 раз.

Если согласно этой теореме для всех целых положительных чисел $n \leqslant r^2$ мы вычтем число делителей вида $4k+3$ из числа делителей вида $4k+1$ и сложим все разности, то получим $\frac{1}{4}(f(r)-1)$. Однако значительно проще несколько изменить порядок вычитаний и сложений, а именно, сперва вычислим общее число всех делителей вида $4k+1$ для всех чисел $n \leqslant r^2$, а затем вычтем из этого числа общее число делителей вида $4k+3$. Чтобы получить первое число, выпишем числа вида $4k+1$ в порядке возрастания величины 1, 5, 9, 13, ..., отбросив все числа, превосходящие r^2. Каждое из этих чисел является делителем в точности столько раз, сколько оно имеет кратных, не превосходящих r^2. Значит, 1 нужно считать $[r^2]$ раз, 5 нужно считать $\left[\frac{r^2}{5}\right]$ раз, если знаком $[a]$ будем обозначать наибольшее целое число, не превосходящее a. Таким образом искомое общее число делителей вида $4k+1$ есть:

$$[r^2]+\left[\frac{r^2}{5}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]+\ldots$$

По определению символа $[a]$ этот ряд прерывается сам собой, как только в квадратных скобках знаменатель превысит числитель. Таким же способом можно представить делители вида $4k+3$; для них мы получим ряд:

$$\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{11}\right]+\ldots$$

Теперь нужно вычесть вторую сумму из первой. Так как обе суммы конечны, то мы можем переставлять слагаемые как угодно, и это нам пригодится при переходе к пределу при $r \to \infty$. Напишем результат в виде:

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=[r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]-\left[\frac{r^2}{11}\right]+\ldots$$

Чтобы лучше заметить, когда обрывается наш ряд, предположим, что r — нечетное число; тогда наш ряд имеет $\frac{r^2+1}{2}$ членов. Слагаемые имеют чередующиеся знаки и не возрастают. Поэтому, если мы прервем наш ряд уже на члене $\left[\frac{r^2}{r}\right]=[r]=r$, ошибка не превысит величины последнего члена, именно r, следовательно, можно представить ошибку в виде θr, где θ — правильная дробь. Если в оставшихся $\frac{1}{2}(r+1)$ членах мы опустим квадратные скобки, то сделаем в каждом члене ошибку, меньшую единицы, и значит, во всей сумме опять-таки получим ошибку, которую можно представить в виде $\theta' r$, где θ' — правильная дробь. Отсюда имеем:

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=r^2-\frac{r^2}{3}+\frac{r^2}{5}-\frac{r^2}{7}+\ldots\pm r\pm\theta r\pm\theta' r$$

или, разделив на r^2:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f(r)}{r^2}-\frac{1}{r^2}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\pm\frac{1}{r}\pm\frac{\theta+\theta'}{r}.$$

Если r безгранично возрастает (принимая значения всех нечетных чисел), то $\frac{f(r)}{r^2}$ стремится к π, как было доказано в § 5. Таким образом получаем ряд Лейбница:

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

2. Наименьшее значение квадратичной формы. Пусть

$$f(m, n) = am^2 + 2bmn + cn^2$$

квадратичная форма с действительными коэфициентами a, b, c и детерминантом $D = ac - b^2 = 1$. В таком случае a не может быть равно нулю. Будем предполагать, что $a > 0$. Тогда, как известно $f(m, n)$ положительно определена, т. е. положительна для всех пар действительных чисел m, n, кроме $m = n = 0$. Докажем, что для любых заданных значений коэфициентов a, b, c $(ac - b^2 = 1, a > 0)$ можно найти такую пару целых чисел m, n, не равных нулю одновременно, что $f(m, n) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Это утверждение получается как следствие нашего исследования относительно наименьшего расстояния между точками единичной решетки. Преобразуем $f(m, n)$ обычным способом, воспользовавшись условием $D = 1$:

$$f(m, n) = \left(\sqrt{a}m + \frac{b}{\sqrt{a}}n\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{a}}n\right)^2.$$

Рассмотрим теперь в декартовых координатах на плоскости точки с координатами:

$$x = \sqrt{a}m + \frac{b}{\sqrt{a}}n,$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{a}}n,$$

где m, n принимают значения всех целых чисел. На основании элементарных теорем аналитической геометрии эти точки должны образовать единичную решетку. В самом деле, они получаются из квадратной единичной решетки $x = m$, $y = n$, если подвергнуть плоскость аффинному преобразованию:

$$x = \sqrt{a}\xi + \frac{b}{\sqrt{a}}\eta,$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{a}}\eta$$

с детерминантом, равным единице. Но $f(m, n) = x^2 + y^2$. Следовательно, если m и n принимают значения всех целых чисел, то $\sqrt{f(m, n)}$ дает расстояние соответствующих точек решетки от начала координат. По теореме, приведенной в начале главы, имеется точка P решетки, для

которой это расстояние не превышает $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Отсюда для двух целых чисел m, n, соответствующих точке P, имеем:

$$f(m, n) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}},$$

что и требовалось доказать.

Этот результат можно применить к решению задачи об аппроксимации (о приближенном выражении) действительных чисел рациональными.

Пусть α произвольное действительное число; рассмотрим форму:

$$f(m, n) = \left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon^2 n^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} m^2 - 2\frac{\alpha}{\varepsilon^2} mn + \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right) n^2.$$

Детерминант этой формы:

$$D = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right) - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^4} = 1.$$

При этом ε пусть будет произвольным положительным числом. Как мы видели, всегда имеются два целых числа m, n, для которых удовлетворяется неравенство:

$$\left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon^2 n^2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Значит, имеют место следующие соотношения:

$$\left|\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad |\varepsilon n| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}},$$

откуда получаем[1]):

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|n|}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad |n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Если α иррационально, то левая часть первого неравенства не может быть равна нулю. Значит, мы необходимо получим бесконечно много пар чисел m, n, если будем давать ε все меньшие значения; ибо тогда разность $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$ будет безгранично убывать. Таким способом мы получаем последовательность рациональных чисел $\frac{m}{n}$, аппроксимирующих (приближающих) иррациональное число α сколь угодно точно. С другой стороны, при помощи второго неравенства мы можем исключить ε. В результате получаем:

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

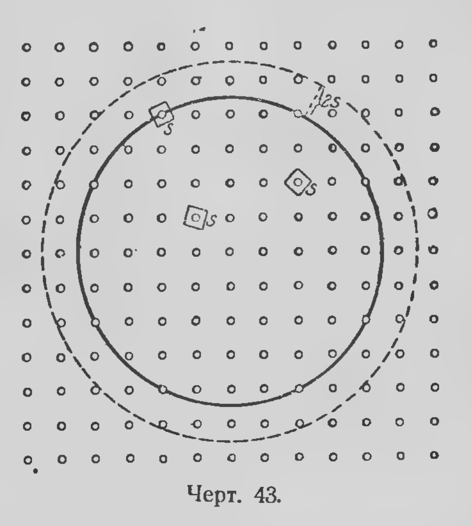
---

[1]) Деление на n при достаточно малом ε допустимо, так как при $n = 0$ неравенство $|\alpha n - m| < \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ не могло бы иметь места.

Итак, мы имеем последовательность приближающих дробей, причем точность приближения пропорциональна квадрату знаменателя, т. е. мы получаем довольно хорошие приближения при сравнительно малых знаменателях.

3. Теорема Минковского. Минковскому удалось доказать теорему относительно точечных решеток, которая несмотря на ее простоту разъяснила много различных проблем теории чисел, которые не могли быть решены другими методами. Для ясности мы не будем приводить здесь эту теорему во всей общности, а удовлетворимся специальным случаем, который можно очень легко сформулировать и который тем не менее содержит все существенное для понимания метода. Эта теорема гласит:

Если в произвольной плоской единичной решетке выбрать квадрат со стороной 2, имеющий центр в точке решетки, то внутри этого квадрата или на его сторонах наверно лежит еще одна точка решетки.



Черт. 43.

Для доказательства представим, что в плоскости решетки ограничена какая-нибудь большая область, например внутренность и граница круга большого радиуса r, имеющего центр в точке решетки. Вокруг каждой точки решетки, попавшей в эту область, опишем квадрат со стороной s, принимая точку решетки за центр (черт. 43). Потребуем теперь, чтобы эти квадраты нигде не перекрывались, как бы велико ни было r, и, исходя из этого требования, оценим длину s стороны квадрата. Так как согласно принятому нами выше обозначению во взятой области расположено $f(r)$ точек решетки и квадраты не перекрываются, то общая площадь их равна $s^2 f(r)$.

С другой стороны, эти квадраты наверно попадут внутрь большего концентрического круга радиуса $r+2s$. Таким образом получаем оценку:

$$s^2 f(r) \leqslant \pi (r+2s)^2$$

или

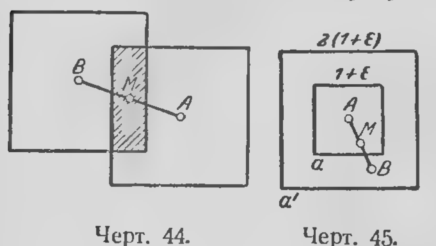
$$s^2 \leqslant \frac{\pi r^2}{f(r)}\left(1+\frac{2s}{r}\right)^2.$$

Если теперь мы дадим s определенное значение и заставим r безгранично возрастать, то, как видно из наших прежних исследований значений $f(r)$, правая часть неравенства будет стремиться к единице. Отсюда мы получаем для s условие:

$$s \leqslant 1.$$

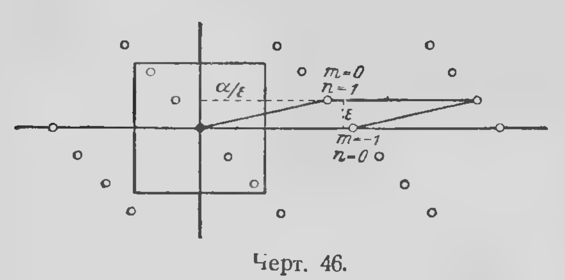
Так как имеются только две возможности, т. е. квадраты либо перекрываются, либо не перекрываются, то для каждого положительного сколь

угодно малого числа ε всегда будет происходить перекрытие, если исходить из квадратов со стороной $1+\varepsilon$. При этом можно вращать квадраты произвольным образом вокруг их центров, так как мы не сделали никаких предположений относительно их взаимного расположения. Будем предполагать, что все квадраты расположены параллельно друг другу. Если мы теперь возьмем два перекрывающихся квадрата a и b с центрами в точках A и B (которые по предположению являются точками решетки), то и середина отрезка AB — точка M должна находиться внутри обоих квадратов (черт. 44).



Черт. 44. Черт. 45.

Для краткости будем называть все точки, которые делят пополам отрезки, соединяющие между собой две точки решетки, «половинными» точками решетки. Тогда мы можем заключить: всякий квадрат a, имеющий стороны длиной $1+\varepsilon$ и точку решетки в центре, должен содержать внутри себя половинную точку. Ибо если мы вокруг всех остальных точек решетки построим квадраты, конгруэнтные и одинаково расположенные с a, то должны иметь место перекрытия, а так как все квадраты у нас равноправны, то и сам квадрат a должен частично перекрываться с некоторым другим квадратом b, т. е. содержать половинную точку M, полученную, как показано на черт. 44. А теперь доказательство легко доводится до конца косвенным путем. Если бы было возможно вокруг точки A решетки как центра построить квадрат со стороной 2, не содержащей ни внутри, ни на сторонах других точек решетки, то можно было бы несколько увеличить этот квадрат, сохранив направление сторон и положение центра, так чтобы и больший квадрат a' со стороной $2(1+\varepsilon)$ не содержал внутри себя точек решетки. С другой стороны, если мы опять сократим этот квадрат вдвое, сохранив направление сторон и положение центра, то получим квадрат a со стороной $1+\varepsilon$ и точкой A решетки в центре, который по только что доказанному должен содержать половинную точку M. Мы получили противоречие. Ибо если мы продолжим отрезок AM на равное ему расстояние до точки B, то точка B должна быть точкой решетки, и из взаимного расположения квадратов a и a' следует, что эта точка решетки должна лежать внутри квадрата a' (черт. 45).



Черт. 46.

Чрезвычайно плодотворное применение находит теорема Минковского к упомянутой уже проблеме аппроксимации действительных чисел рациональными. Мы можем поступать совершенно так же, как выше, но получим несколько лучший результат. При помощи заданного

действительного иррационального числа a построим решетку, точки которой имеют декартовы координаты $x = \frac{an - m}{\varepsilon}$, $y = \varepsilon n$, где m, n принимают значения всех целых чисел, а ε — произвольное положительное число Как и выше, убеждаемся, что эта решетка является единичной решеткой; на черт. 46 изображен элементарный параллелограм решетки, причем предположено, что $0 < a < 1$. Если мы построим квадрат с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат и равными 2, то по теореме Минковского этот квадрат должен содержать еще точку решетки. Эта точка отмечена двумя определенными числами m, n, которые не могут одновременно равняться нулю. С другой стороны, координаты точек внутри квадрата и на его сторонах удовлетворяют неравенствам:

$$|x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1$$

Значит, числа m, n удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{|an - m|}{\varepsilon} \leqslant 1, \quad |\varepsilon n| \leqslant 1,$$

или

$$\left|a - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|n|}, \quad |n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Это опять дает последовательность дробей $\frac{m}{n}$, сколь угодно точно аппроксимирующих число a. Исключая ε, получаем:

$$\left|a - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом теорема Минковского доказывает существование последовательности дробей, приближающих a еще лучше, чем это имело место для последовательности, построенной в предыдущем параграфе, ибо там мы получили аппроксимации:

$$\left|a - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{n^2},$$

которые являются более слабыми, так как $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$.

Методы, проведенные в настоящем параграфе, применимы не только на плоскости, но и в пространствах любого числа измерений, благодаря чему возможно получить значительно более общие теоретико-числовые результаты.

7. Точечные решетки в трех и более измерениях. Пространственная точечная решетка получится в том случае, если применить к параллелепипеду в трех направлениях тот же способ, при помощи которого мы получали плоскую точечную решетку из параллелограма. В пространстве одна и та же решетка также может быть построена при помощи параллелепипедов различного вида, но для этого они должны иметь равные объемы. Далее, восемь вершин такого параллелепипеда должны

совпадать с восемью точками решетки, а внутри параллелепипеда не должно быть ни одной точки решетки. Мы будем называть решетку единичной, когда образующий ее элементарный параллелепипед имеет объем, равный единице.

В силу тех же соображений, какие мы имели для плоскости, для пространственной единичной решетки также не существует положительной нижней границы наименьшего расстояния между двумя точками решетки, но заведомо имеется верхняя граница этой величины.

Так как определение верхней границы в данном случае ничем не отличается от определения этой границы для плоской решетки, то мы можем его здесь опустить. Роль, которую в плоскости играл равносторонний треугольник, в пространстве переходит к правильному тетраэдру.

Однако, в то время как на плоскости элементарный параллелограм состоит из двух равносторонних треугольников, соответствующий ему в пространстве параллелепипед — правильный ромбоэдр — состоит из двух правильных тетраэдров и одного правильного октаэдра (черт. 49, стр. 51)[1]. Объем этого параллелепипеда равен $\frac{c^3}{\sqrt{2}}$, где c — длина ребра тетраэдра. Этот объем должен быть равен единице. Из соотношения $\frac{c^3}{\sqrt{2}}=1$ получаем $c=\sqrt[6]{2}$. Следовательно, в пространственной единичной решетке на расстоянии $\sqrt[6]{2}$ от каждой точки решетки всегда должна находиться по крайней мере еще одна точка решетки.

Аналогично тому, как это было на плоскости, наш вывод одновременно разрешает задачу наиболее плотного решетчатого расположения шаров. Такое расположение будет достигнуто в том случае, когда центры шаров образуют ромбоэдральную решетку. Если радиусы шаров равны 1, то длина ребер тетраэдра равна 2, и следовательно, объем элементарной ромбоэдральной области равен:

$$\frac{2^3}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}.$$

Следовательно, область пространства, имеющая объем J, содержит приближенно $\frac{J}{4\sqrt{2}}$ точек решетки и, значит, столько же единичных шаров заданного расположения. Так же, как на плоскости, это соотношение тем точнее, чем больше J.

Опишем более подробно это расположение шаров. Вообразим себе сначала плоский слой, составленный из единичных шаров, так что их центры образуют решетку плотнейшего расположения кругов на плоскости. Очевидно, мы таким образом получим наиболее плотное плоское расположение шаров.

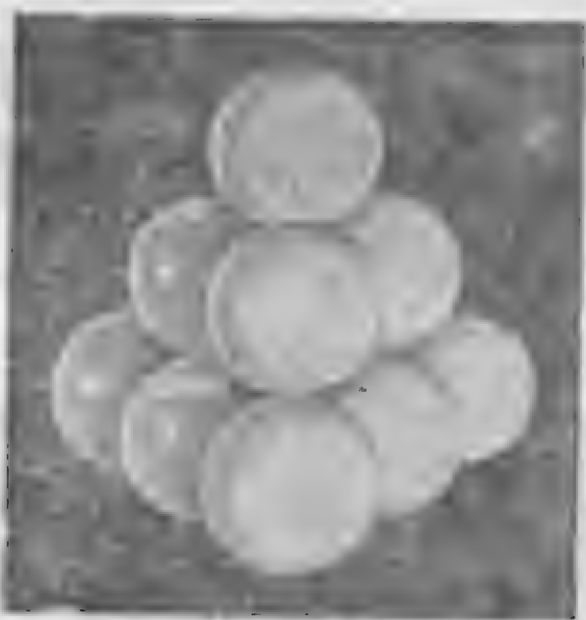
---

[1]) На плоскости наиболее плотное расположение кругов приводит к непрерывному заполнению плоскости конгруэнтными равносторонними треугольниками. Можно было бы думать, что аналогичная пространственная задача приводит к построению пространства из конгруэнтных правильных тетраэдров. Однако можно доказать, что пространство не может быть построено из конгруэнтных правильных тетраэдров.

Возьмем теперь второй такой же слой и постараемся наложить его на первый слой так, чтобы оба слоя оказались между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми было бы возможно меньше. Чтобы достигнуть этого, необходимо положить шары второго слоя как раз в углубления, получившиеся между шарами первого слоя. Однако при этом нехватит места для заполнения всех таких углублений, и необходимо все время перескакивать через одно углубление (черт. 42, стр. 41). Если теперь мы захотим таким же образом наложить третий слой шаров на первые два, то взаимное расположение трех слоев еще не определено



Черт. 47а.



Черт. 47б.



Черт. 47в.

однозначно. С одной стороны, можно так наложить третий слой в углубления второго, что первый и третий слои будут расположены симметрично относительно второго (черт. 47а). С другой стороны, мы можем положить шары третьего слоя в углубления, остающиеся не заполненными при только что указанном расположении (черт. 47 б, в); тогда первый слой будет переходить во второй при посредстве такого же смещения, как и второй в третий. В этом случае бесконечное повторение этого же смещения в обе стороны даст расположение шаров в виде ромбоэдральной решетки. Таким образом, в то время как на плоскости наибольшая плотность достигалась единственным способом расположения кругов, та же самая задача в пространстве приводит к двум совершенно различным расположениям шаров[1]). При этом центры шаров вообще не должны образовывать правильной фигуры во всем пространстве, так как можно при переходе от слоя к слою произвольно выбирать один из двух способов расположения. Однако один признак свойственен всем описанным расположениям: каждый шар соприкасается всегда точно с двенадцатью другими шарами, именно с шестью шарами того же слоя и с тремя шарами выше и ниже лежащих слоев.

Вопрос о наиболее плотном решетчатом расположении шаров был изучен также и для пространств четырех и пяти измерений. Замечательно, что при этом обнаружилось, что точечная решетка, которая

---

[1]) В природе действительно осуществляются оба расположеиия. Первый случай имеет место в гексагональных кристаллах типа магнезит, второй — у кубических кристаллов.

в пространствах высших измерений соответствует треугольной и ромбоэдральной, не дает наиболее плотного расположения шаров. Результаты исследований сведены в следующей таблице:

	Кратчайшее расстояние между точками	Плотность расположения шаров
Плоскость	$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}=1{,}075$	$0{,}289\,\pi=0{,}907$
Обычное пространство	$\sqrt[6]{2}=1{,}122$	$\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi=0{,}740$
Четырехмерное пространство	$\sqrt[4]{2}=1{,}189$	$\frac{\pi^2}{16}=0{,}617$
Пятимерное пространство	$\sqrt[10]{2}=1{,}074$	$\frac{\sqrt{2}}{60}\pi^2=0{,}465$

(Объем шара единичного радиуса в четырехмерном пространстве равен $\frac{\pi^2}{2}$, а в пятимерном $\frac{8\pi^2}{15}$.)

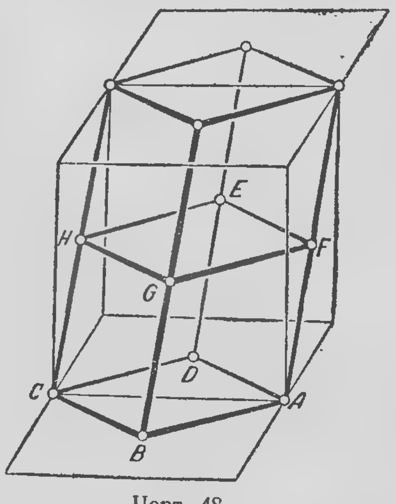
Есть еще целый ряд правильных расположений шаров, представляющих интерес, хотя плотность их и не является наибольшей. В качестве примера можно назвать кубическое расположение шаров, при котором центры единичных (т. е. радиуса, равного единице) шаров образуют такую же решетку, какая получается из куба с ребром, равным 2. При этом каждый шар соприкасается в точности с шестью соседними шарами; можно, значит, ожидать, что плотность этого расположения намного меньше плотности ромбоэдральной решетки, в которой каждый шар соприкасается с двенадцатью другими. Чтобы доказать это, расположим кубическую решетку так, чтобы каждый куб заключал как раз один шар. Объем куба со стороной 2 равен 8; значит, в некоторой большой части пространства объемом в $8x$ всегда заключено x шаров. А так как объем единичного шара равен $\frac{4}{3}\pi$, то плотность кубического расположения

$$D=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{\pi}{6}=0{,}524.$$

Далее напрашивается противоположный вопрос о наименее плотном правильном расположении шаров в пространстве, при котором шары еще удерживаются друг другом. При этом каждый шар должен соприкасаться по крайней мере с четырьмя другими, центры которых не лежат в одной плоскости и не расположены на одном полушарии; в противном случае наш шар не удерживался бы соседними шарами. Оказывается, получается значительно менее плотное расположение, если каждый шар соприкасается в точности с четырьмя другими, причем их центры служат вершинами правильного тетраэдра. Ниже мы построим систему точек,

расположенных таким образом. Потом мы исследуем, действительно ли такое расположение шаров наименее плотно.

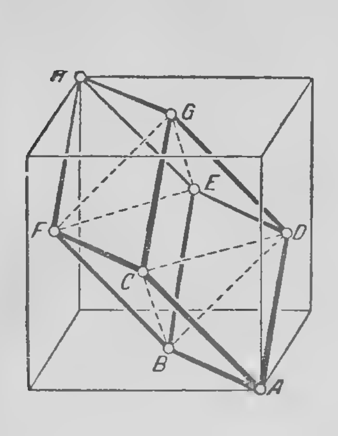
Добавим к точкам кубической решетки центры граней кубов. Получающаяся фигура, составленная из точек, опять представляет решетку (кубическую решетку с центрированными гранями), ибо она порождается смещением параллелепипеда $ABCDEFGH$ (черт. 48 и 49) (Эти две фигуры иллюстрируют уже упомянутый выше факт, что одна и та же решетка может порождаться весьма разнообразными элементарными телами.) На черт. 49 видно, что получающаяся решетка есть как раз решетка наиболее плотного расположения шаров.



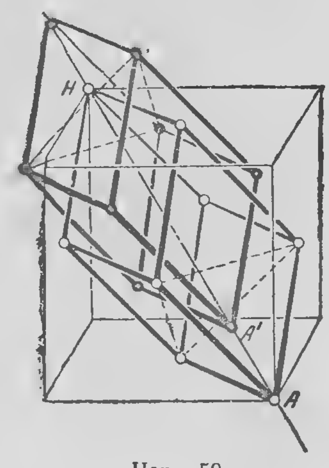
Черт. 48.

В самом деле, параллелограм $ABDE$ определяет на плоскости ABD решетку, составленную из равносторонних треугольников; ближайшая параллельная плоскость, в которой расположены точки решетки, есть CFG, и точки решетки на этой плоскости расположены над первыми так, что образуют с ними правильные тетраэдры, как, например, $ABCD$.

Возьмем дополнительно к решетке K еще другую, конгруэнтную ей решетку L, получающуюся из K путем смещения в направлении главной диагонали AH куба на расстояние, равное четверти длины диагонали (черт. 50).



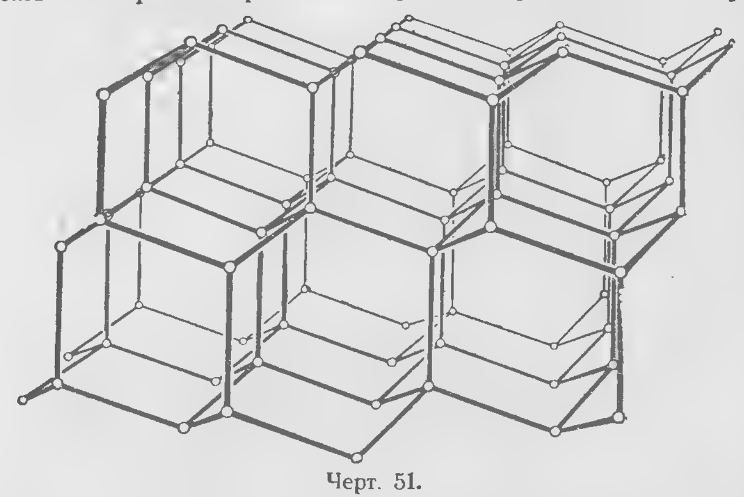
Черт. 49.



Черт. 50.

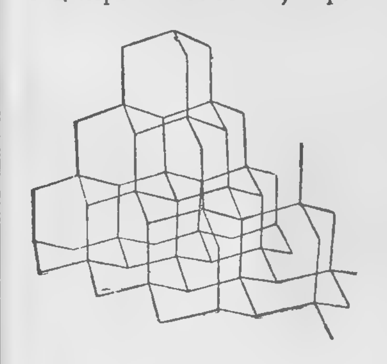
Можно утверждать, что точки решеток K и L вместе представляют центры искомого «тетраэдрального» расположения шаров; при этом радиус шара должен равняться $\frac{1}{2}AA'$, где A' — точка решетки L, получившаяся из точки A. В самом деле, из нашего построения получается, что

точка A' одинаково удалена от тех точек, которые на черт. 49 обозначены через $ABCD$; отсюда следует, что шар с центром в A' будет соприкасаться как раз с шарами с центрами в вершинах этого тетраэдра.



Черт. 51.

Из соображений симметрии то же самое должно иметь место для всех шаров решетки L; но то же самое должно быть и для шаров решетки K (например с центром в точке H, черт. 50), так как решетки K и L отличаются друг от друга в своем расположении только прямым и обратным направлениями смещения. Положение центров шаров наглядно изображено на черт. 51 и 52, где центры соседних шаров всюду соединены прямыми линиями[1]).



Черт. 52.

Вычислим теперь плотность тетраэдрального расположения. Очевидно, на каждый куб приходится четыре шара решетки L, так как при смещении точки $EFGH$ (черт. 49) с их шарами целиком выступают из куба, а шары с центрами в $ABCD$ входят целиком внутрь куба. Так как решетка K имеет ту же плотность, как и L, то всего на каждый куб приходится восемь шаров расположения. Если теперь снова положить радиус шара $\frac{1}{2}AA'$ равным единице, то, если a — ребро, b — главная диагональ куба, будем иметь $b=4AA'=8=a\sqrt{3}$. В соответствии с этим объем куба равен $a^3=\frac{8^3}{3\sqrt{3}}$.

1) Геометрическое место центров шаров при этом расположении не дает никакой решетки, так как к этому геометрическому месту не принадлежит, например, точка A'', которая получится, если на черт. 50 продолжить линию AA' на равное ей расстояние за точку A'; если бы это расположение было решеткой, то наряду с A и A' в ней должна была бы содержаться и точка A''. Получившееся расположение называется точечной системой. Точечные системы обладают более общими свойствами симметрии, чем решетки. Их определение будет дано в § 9.

Для искомой плотности находим аналогично прежнему:

$$D=\frac{8}{a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{16}\pi=0,340.$$

Теперь покажем (следуя H. Heesch и F. Laves) [1]), что тетраэдральное расположение шаров отнюдь не является наиболее разреженным, но что после простого изменения его можно притти к значительно более разреженному расположению, при котором точно так же каждый шар соприкасается с четырьмя другими и все шары равноправны. При этом центры четырех шаров, соприкасающихся с одним и тем же шаром, образуют вершины уже не правильного тетраэдра, а другого тетраэдра с равносторонним основанием и равнобедренными гранями.

Чтобы получить такое расположение, будем исходить от шара K тетраэдрального расположения и поместим внутри этого шара четыре меньших одинаковых шара k_1, k_2, k_3, k_4, которые касаются изнутри шара K как раз в тех точках, в которых шар K извне соприкасается с соседними шарами тетраэдрального расположения. Так как эти четыре точки образуют вершины правильного тетраэдра, то то же самое имеет место и для центров малых шаров.

Надлежащим подбором радиусов малых шаров можно добиться того, чтобы шары k_1, k_2, k_3, k_4 попарно соприкасались друг с другом, т. е. чтобы каждый из этих шаров соприкасался с тремя другими. Теперь вообразим, что такое построение проведено и для всех других шаров тетраэдрального расположения. Тогда шар K помимо соприкосновения с шарами k_1, k_2, k_3, k_4 будет соприкасаться еще с одним внешним шаром k_5, именно в том месте, где k_1 касается шара K изнутри; в этой точке шар K соприкасается с шаром K' тетраэдрального расположения и в той же точке шар K' соприкасается изнутри с одним из меньших шаров, который мы и называем k_5. Разумеется, то же самое можно сказать и обо всех шарах нашего построения, конгруэнтных k_1, так что эти шары действительно образуют расположение, при котором каждый шар удерживается на месте соседними.

Чтобы сравнить плотность d полученного таким способом расположения с плотностью D тетраэдрального расположения, очевидно, достаточно сравнить общий объем четырех шаров k_1, k_2, k_3, k_4 с объемом шара K. Если r — радиус шара k_1, а R — радиус шара K, то мы будем иметь:

$$\frac{d}{D}=\frac{4\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=4\frac{r^3}{R^3}.$$

На основании элементарных соображений из нашего построения следует соотношение:

$$R=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)r,$$

а отсюда получаем:

$$d=\frac{4}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)^3}D=0,3633D.$$

[1]) См. Z. f. Kristallographie, т. 82, стр. 10, черт. 7.

Таким образом это расположение шаров значительно разреженней, чем тетраэдральное. Есть основания считать, что оно является наиболее разреженным. В приводимой таблице сведены характеристические постоянные четырех рассмотренных расположений шаров.

		Каждый шар соприкасается с … другими шарами
Наиболее плотное расположен. шаров .	$D=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{4}{3}\pi=0{,}740$	12
Кубическое расположение	$D=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi=0{,}513$	6
Тетраэдральное расположение	$D=\frac{3.\sqrt{3}}{64}\frac{4}{3}\pi=0{,}340$	4
Наименее плотное расположение . . .	$D=0{,}123$	4

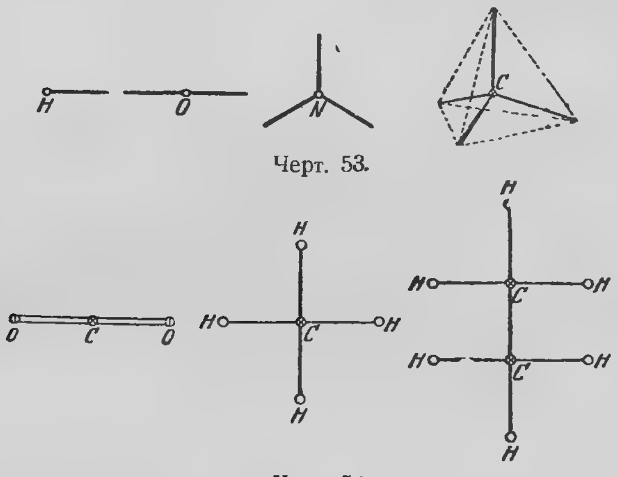
Если отказаться от требования правильного расположения кругов или шаров и потребовать, например, только, чтобы в достаточно большой области плоскости (пространства) было уложено возможно больше одинаковых кругов (шаров), то необходимы будут исследования другого рода. Для случая плоскости было доказано, что круги в этом случае сами собой расположатся решеткообразно. Для случая трехмерного и многомерного пространств вопрос еще не выяснен.

8. Кристаллы как правильные точечные системы. Теория дискретных правильных точечных фигур находит важное применение в кристаллографии. Правильная внешняя форма кристаллов и их способность раскалываться по определенным направлениям дают основания предполагать, что отдельные атомы или молекулы, рассматриваемые как точки, образуют такую фигуру, которая может быть продолжена до бесконечности конгруэнтно самой себе. Фигура, получающаяся путем такого конгруэнтного продолжения, называется *точечной системой*. Ниже мы дадим более точное определение этого понятия и покажем, что существует лишь конечное число существенно различных точечных систем.

Теперь в связи с нашим представлением о кристаллах как системах точек возникают две задачи, частично относящиеся к физике, частично — к математике. Прежде всего нужно для каждого вида кристаллов найти соответствующую систему точек; затем следует различие в физическом поведении кристаллов свести к различию в геометрических свойствах соответствующих систем точек.

Первые попытки получить таким способом определенное представление о структуре кристаллов принадлежат Бравэ (Bravais, 1848). Однако его теория получила прочное эмпирическое обоснование лишь после опытов Лауэ (Laue) с дифракцией рентгеновых лучей в кристаллах (1913), которые не только подтвердили существование кристаллической решетки, но дали возможность эмпирически находить точную структуру решетки.

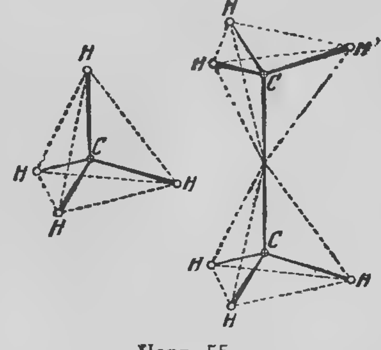
Самое грубое представление, которое можно иметь об атоме, состоит в том, что атом представляют себе в виде точки с числом «отростков»,



Черт. 53.

Черт. 54.

соответствующим валентности атома; при этом принимают, что эти отростки, изображающие валентность, расположены в пространстве по возможности симметрично, поскольку нет оснований предполагать отклонения от симметрии. Соединения отдельных атомов в молекулу представляют тогда так, что отростки различных атомов попарно совпадают.



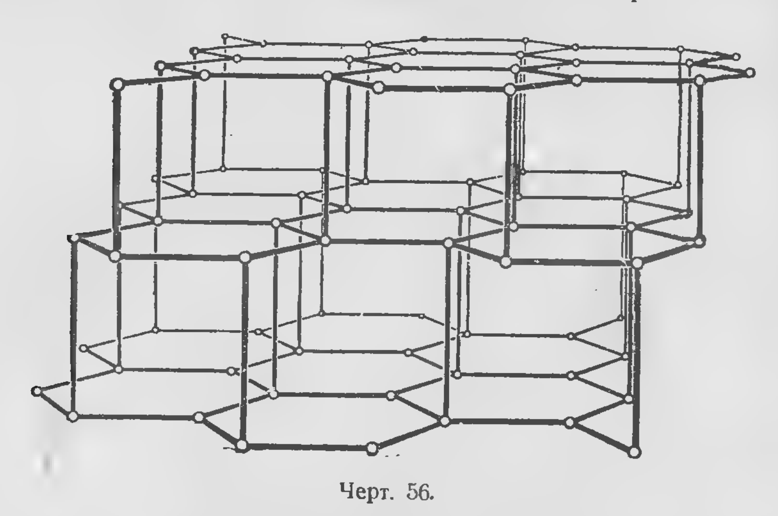
Черт. 55.

Так, например, водород (H), кислород (O), азот (N) и углерод (C) соответственно одно-, двух-, трех- и четырехвалентны. Значит, мы можем представить себе атомы этих элементов как точки с одним, двумя, тремя и четырьмя отростками соответственно (черт. 53). Симметрия требует, чтобы у H, O и N все отростки лежали в одной плоскости. По тем же соображениям мы должны ожидать, что у C четыре отростка направлены в вершины правильного тетраэдра, в центре которого находится атом.

В качестве примера молекул рассмотрим угольную кислоту (CO_2), метан (CH_4) и этан (C_2H_6). На черт. 54 приведена схема соединения атомов (структурные формулы), в которой не принято во внимание действительное пространственное расположение атомов. Черт. 55 изображает возможное и согласно последним исследованиям вероятное пространственное расположение атомов в молекулах метана и этана (vant' Hoff, 1874). При этом следует представлять себе, что в модели этана один тетраэдр может вращаться по отношению к другому вокруг прямой, соединяющей оба атома углерода.

Возникает вопрос, нельзя ли построить кристаллы целиком, так же как молекулы, путем дальнейшего последовательного присоединения атомов. Покажем возможность такого построения сперва на простейшем случае, когда кристалл состоит из одного единственного элемента. Для этого возьмем алмаз, который, как известно, представляет собой чистый углерод.

Задача состоит в том, чтобы так соединить друг с другом атомы углерода, рассматриваемые как точки с четырьмя отростками каждая, чтобы каждая точка была по возможности симметрично связана с четырьмя другими точками при помощи двух совпадающих отростков. Вопрос



Черт. 56.

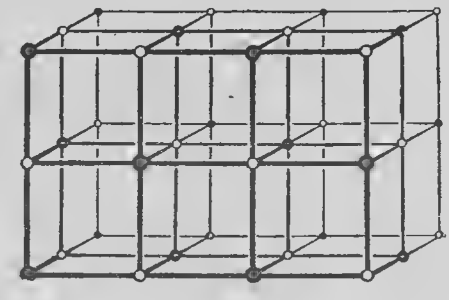
о возможности такого построения есть чисто геометрический вопрос. Оказывается, что такая конструкция действительно осуществима; для этого следует расположить атомы так же, как расположены центры шаров при тетраэдральном расположении, ибо, как видно из построения, проведенного в § 7, тогда каждая точка имеет ровно четыре ближайших соседних точки, по отношению к которым она расположена так же, как центр правильного тетраэдра по отношению к вершинам (черт. 50, 51, 52, стр. 51 — 52). Как показывают новейшие исследования обоих Брэггов (Bragg), алмаз действительно геометрически таким образом построен из своих атомов. Расстояния между соседними точками составляют согласно этим измерениям $1{,}53 \cdot 10^{-8}$ *см* [1]).

Помимо алмаза существует другой кристалл, составленный исключительно из атомов углерода, а именно графит. Измерения показывают, что у графита отростки атома углерода расположены несимметрично и даже не равны по длине, а именно один отросток удлинен до $3{,}41 \cdot 10^{-8}$ *см*, между тем как другие три отростка укорочены до $1{,}45 \cdot 10^{-8}$ *см*. По-

---

[1]) В кристаллах сернистого цинка (ZnS) атомы также имеют тетраэдральное расположение. Атомы цинка Zn и серы S образуют две решетки, из которых мы строили эту систему точек (черт. 50, стр. 51).

следние три расположены приблизительно в одной плоскости. Насколько точно в действительности лежат эти отростки в одной плоскости, экспериментально недостаточно выяснено; для дальнейшего достаточно принять, что они расположены точно в одной плоскости. При этом условии пространственная решетка графита может быть описана следующим образом. Построим плоскую систему правильных шестиугольников, в вершинах которых расположены атомы (черт. 56). При таком плоском расположении у каждого атома использованы три валентности. Для того чтобы связать этот слой с верхним и нижним слоями, отростки пока свободной четвертой валентности должны быть попеременно направлены вверх и вниз. Тогда все слои в самом деле окажутся конгруэнтными и точки среднего слоя будут лежать на одной вертикали то с точками верхнего слоя, то с точками нижнего слоя попеременно. Таким образом можно продолжать построение неограниченно во все стороны.



Черт. 57.

Две точечные системы, которые были установлены для алмаза и графита, объясняют некоторые различия в физическом поведении обоих кристаллов, например значительно большую ломкость и сжимаемость графита. Однако объяснение других различий встречает значительные трудности.

Пример кристалла, составленного из различных атомов, представляет поваренная соль (NaCl). Кристалл поваренной соли представляет собой кубическую решетку, вершины которой занимают атомы хлора и натрия попеременно (черт. 57). Расстояние между соседними точками решетки составляет $2 \cdot 10^{-8}$ *см*, т. е. больше кратчайшего и меньше длиннейшего отростка атома углерода в графите. В кристалле поваренной соли каждая точка решетки имеет шесть соседних точек. Между тем атомы натрия и хлора одновалентны. Значит, этот кристалл не соответствует рассмотренной выше теории валентности. Вообще не существует непосредственной связи между валентностями атомов, из которых составлен кристалл, и числом соседних точек у каждой точки решетки. Алмаз, у которого оба числа совпадают, представляет исключение.

Замечательно, что в решетке поваренной соли нет пар точек, которые могли бы соответствовать молекулам (NaCl). Иначе говоря, решетка составляется непосредственно из атомов обоих видов. В противоположность этому имеются другие кристаллы, в которых без большого произвола можно обнаружить молекулы или по меньшей мере комплексы атомов. В расположении пространственной решетки полевого шпата ($CaCO_3$), например, комплекс атомов CO_3 четко проявляется как нечто связное.

В то время как в алмазе осуществляется тетраэдральное расположение шаров, у большого числа кристаллов мы находим «кубическую решетку с центрированными гранями», которой соответствует то из наиболее плотных расположений шаров, при котором от слоя к слою переходят

одинаковым способом (черт. 47б, в, стр. 49). Другой тип наиболее плотного расположения шаров, когда система углублений меняется от слоя к слою (черт. 47а, стр. 49), встречается, например, в кристалле магния. Такое расположение называется «плотнейшим гексагональным расположением шаров».

9. Правильные точечные системы и дискретные группы движений. Кристаллография приводит нас к чисто геометрической задаче: установить все возможные правильные расположения объектов, например атомов. Так как для многих целей мы можем представить себе объекты в виде точек, то мы называем подобное расположение правильной точечной системой. В соответствии с изложенным выше мы определим правильную точечную систему следующими тремя свойствами:

1. Правильная плоская или пространственная точечная система должна содержать бесконечное множество точек, причем число точек, лежащих внутри круга или шара, должно возрастать пропорционально квадрату или, соответственно, кубу его радиуса до бесконечности.

2. Правильная точечная система должна содержать во всякой конечной области лишь конечное множество точек.

3. Правильная точечная система должна иметь одинаковое расположение по отношению к любой из своих точек.

Первые два определяющих свойства понятны без дальнейших разъяснений. Третье свойство можно пояснить следующим образом: проведем из определенной точки системы линии, соединяющие ее со всеми другими точками системы, и сделаем то же самое с какой-нибудь другой точкой системы. Тогда третье определяющее свойство говорит, что обе образованные таким образом фигуры, составленные из прямолинейных отрезков, конгруэнтны, т. е. при определенном движении плоскости или пространства одна фигура может быть переведена в другую. Таким образом, находясь в какой-нибудь точке системы, мы не можем путем измерений установить, какая это точка, ибо все точки одинаково расположены одна по отношению к другим. Однако, для того чтобы удовлетворить третьему требованию, вовсе нет необходимости в проведении соединительных линий; нужно только потребовать, чтобы каждая точка системы могла быть переведена определенным движением плоскости или пространства в любую другую точку так, чтобы в каждом месте, где раньше находилась точка системы, и после движения находилась бы точка системы, и обратно.

О таком движении мы говорим, что оно оставляет точечную систему неизменной или инвариантной, а всякое движение подобного рода называем совмещением системы. При помощи этого понятия можно сформулировать третье свойство следующим образом:

3. Всякая точка правильной точечной системы может быть переведена во всякую другую точку путем совмещения системы.

Из нашего определения правильной точечной системы следует, что точечные решетки, которые мы определяли путем построения из элементарного параллелограма или параллелепипеда, принадлежат к точечным системам. Введение нового понятия оправдывается, однако, тем, что существуют точечные системы, как, например, пространственная решетка алмаза, которые не являются точечными решетками.

Теперь мы переходим к установлению совокупности всех различных правильных точечных систем. При этом оказывается, что к точечным решеткам нужно добавить только такие фигуры, которые подобно алмазной решетке состоят из нескольких вставленных друг в друга конгруэнтных и параллельно расположенных точечных решеток.

С первого взгляда свойства, которыми определяется точечная система, кажутся столь общими, что вообще трудно поверить в возможность геометрически обозреть все эти фигуры; тем не менее в действительности такое обозрение возможно. Мы сумеем его сделать, если проследим за совмещениями системы.

Совокупность всех совмещений точечной системы обладает двумя характерными свойствами, существенно облегчающими исследование их: во-первых, два совмещения, проведенные последовательно одно за другим, всегда вновь дают совмещение, а, во-вторых, движение, которое превращает какое-нибудь совмещение в первоначальное, всегда само есть совмещение. Всякая совокупность преобразований, обладающая указанными двумя свойствами, называется в математике *группой* преобразований. Чтобы можно было пользоваться обоими свойствами для вычислений, будем обозначать каждое преобразование одной буквой, например a или b. Преобразование, которое получится, если провести сперва a, а потом b, будем всегда обозначать символом ab. Преобразование, обратное преобразованию a, обозначим через a^{-1}. Если объединить оба свойства, которыми мы определили группу, в одной формуле, то мы придем, например, к преобразованию aa^{-1}. Эта операция, очевидно, оставляет все точки неизменными. Тем не менее удобно рассматривать ее как особый случай преобразования. Она называется *тождественным* преобразованием или *единицей* и обозначается буквой e. В символических вычислениях преобразование e играет роль, аналогичную роли единицы при умножении чисел; имеем всегда $ae = ea = a$.

Если к какой-нибудь точке системы мы будем применять все возможные совмещения системы, то, согласно третьему определяющему свойству точечной системы, мы будем получать из этой точки все другие точки правильной системы. С другой стороны, согласно определению совмещения при этом ни одна точка системы не может перейти в точку, не принадлежащую к системе; в противном случае это движение не оставляло бы систему неизменной. Говорят вообще, что точка *эквивалентна* другой точке по отношению к некоторой заданной группе преобразований, если одна точка получается из другой путем одного из преобразований данной группы. В соответствии с этим точечная система состоит из совокупности всех точек, эквивалентных некоторой определенной точке по отношению к группе совмещений. Значит, в силу второго определяющего свойства точечной системы, в каждой конечной области имеется лишь конечное множество точек, эквивалентных какой-нибудь определенной точке. Если вообще в каждой конечной области находится лишь конечное множество точек, эквивалентных любой из точек по отношению к некоторой группе преобразований, то такая группа называется дискретной. В соответствии с этим группа совмещений точечной системы всегда должна быть дискретной. Казалось бы вполне допустимо, чтобы для точки, не принадлежащей к системе, мы имели в конечной области бесконечное множе-

ство эквивалентных точек. Однако непосредственно очевидно и легко может быть строго доказано, что в таком случае и для точек системы мы должны были бы иметь бесконечное множество эквивалентных точек в конечной области.

Итак, мы должны искать группы совмещений исключительно среди дискретных групп движений плоскости и пространства, а точечные системы— исключительно среди систем точек, эквивалентных какой-нибудь точке относительно такой группы. Таким, казалось бы, окольным путем можно провести исследование наиболее просто. Оказывается, что вообще существует лишь конечное множество существенно различных дискретных групп движений на плоскости и в пространстве.

Если мы найдем для этого конечного числа групп системы точек, эквивалентных некоторой точке, то эти системы заведомо должны будут удовлетворять второму и третьему определяющим свойствам точечной системы. В противоположность этому существуют группы, не обладающие первым свойством. Эти последние группы нам необходимо также исключить. Оставшиеся группы, и только они, приводят нас к точечным системам. В связи с тем значением, которое имеют точечные системы для кристаллографии, дискретные группы движений, приводящие к точечным системам, называются кристаллографическими группами движений.

Теперь перейдем к установлению дискретных групп движений. Нам придется ограничиться движениями плоскости, так как аналогичные исследования для пространства завели бы нас слишком далеко, заставив выйти за пределы этой книги. Даже для случая плоскости дискретные группы движений требуют довольно обширного исследования. Тем не менее мы проведем это исследование полностью, так как при этом мы познакомимся с методами, характерными и для случая пространства.

10. Плоские движения и их сложение. Классификация дискретных групп плоских движений. В дальнейшем мы будем называть отображение плоскости на самое себя плоским движением, если конечное положение плоскости может быть получено из начального положения *непрерывным* движением плоскости как твердого тела, и притом таким движением, при котором траектории всех точек плоскости лежат *в самой плоскости*. В остальном плоское движение будет характеризоваться только начальным и конечным положениями, независимо от того, как в каждом отдельном случае в действительности происходило перемещение; при этом, конечно, перемещение может происходить различным образом, так что траектории могут даже частично выступать из плоскости или могут происходить деформации, которые в конце концов исчезают. Для наших целей достаточно потребовать только *возможности* такого перемещения, как оно описано выше. Одна из первых наших задач будет заключаться в том, чтобы найти для каждого данного плоского движения наиболее простой вид перемещения.

Простейшее из плоских движений есть параллельный перенос [1]), при котором все точки движутся в плоскости в одном и том же направлении на равные расстояния и каждая прямая остается параллельной самой себе.

---

[1]) В дальнейшем, ради краткости, параллельный перенос мы будем называть просто переносом.

Следующий часто встречающийся тип плоских движений представляют вращения плоскости вокруг какой-нибудь точки на определенный угол (поворот). При этом направление каждой прямой изменяется на тот же угол[1]), и кроме центра вращения ни одна точка плоскости не остается неподвижной.

При любом плоском движении, отличном от тождественного преобразования, можно указать самое большее одну точку, остающуюся неподвижной.

В самом деле, если мы закрепим две точки плоскости, то кроме тождественного преобразования существует только одно преобразование плоскости в самое себя, которое можно получить движением плоскости как твердого тела; оно получается, если повернуть плоскость на 180° вокруг прямой, соединяющей две закрепленные точки. Это преобразование не принадлежит к числу тех, которые были указаны в начале параграфа. Оно не может быть получено при помощи вышеуказанных перемещений. В самом деле, при таком преобразовании окружность, описываемая движением точки слева направо, всегда переходит в окружность, описываемую справа налево, между тем как при плоском движении нельзя получить изменение направления вращения на обратное, что следует из непрерывности этого движения. Наше рассмотрение показывает, что плоское движение вполне определяется изображенями двух точек. В самом деле, два плоских движения, преобразующие одинаковым образом две каких бы то ни было точки, могут отличаться одно от другого только на плоское движение, которое должно оставлять неизменными две точки, иначе говоря, не могут отличаться друг от друга.

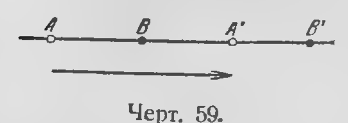
Обозрение плоских движений значительно облегчается благодаря тому, что каждое такое движение можно получить путем только одного параллельного переноса или только одного поворота. Чтобы доказать наше утверждение, допустим, что нам дано определенное плоское движение b; если исключить тривиальный случай тождественного преобразования, то можно выбрать некоторую точку A, которая переходит в A'. Пусть B есть середина отрезка AA'. Точка B может либо оставаться неподвижной, либо перейти в другую точку B'. В первом случае (черт. 58) наше утверждение во всяком случае оправдывается. В самом деле, в этом случае можно заменить заданное движение b вращением вокруг точки B на угол π. Это вращение b' переводит точки A и B в те же точки A' и B, как и заданное движение b. Но мы видели, что плоское движение вполне определяется двумя точками и положением их образов, следовательно, движения b' и b должны совпадать. Если же B переходит в другую точку B', то опять будем различать частный случай, когда B' лежит на прямой AA', и общий случай, когда AA' и BB' — различные прямые. В первом случае

Черт. 58.

---

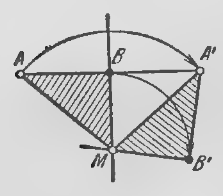
[1]) Для прямых, проходящих через центр вращения, это очевидно. Для всякой другой прямой это следует из того, что каждая прямая имеет параллельную прямую, проходящую через центр вращения, а все параллельные прямые остаются параллельными при всяком движении.

можно видеть, что B' однозначно определено; действительно, расстояние между A и B должно оставаться неизменным при движении b. А так как по построению $AB = A'B$, то должно быть также $A'B' = A'B$. Этим равенством и условием $B' \neq B$ точка B' определяется однозначно (черт. 59). Но если так, то можно заменить движение b переносом, преобразующим A в A', ибо такой перенос переводит также точку B в заданную точку B'.



Черт. 59.

Итак, остается еще рассмотреть последний случай. Для этого восставим в точке B перпендикуляр к прямой AB и точно так же в точке B' перпендикуляр к прямой $A'B'$ (черт. 60). Так как оба перпендикуляра по предположению и по построению не совпадают и не параллельны, то они пересекаются в некоторой точке M. Мы утверждаем, что можно заменить движение b тем поворотом вокруг точки M, который переводит точку A в точку A'. Для доказательства следует показать, что при этом точка B переходит в B'; но это следует из конгруэнтности треугольников AMB и $A'MB'$. Мы имеем, с одной стороны, $AMB \cong A'MB$, ибо оба треугольника имеют прямые углы при точке B и равные катеты, а, с другой стороны, $A'B'M \cong A'BM$, ибо эти треугольники имеют прямые углы при точках B и B' и общую гипотенузу $A'M$ и, кроме того, как мы уже упоминали, $A'B' = AB = A'B$.



Черт. 60.

Полученный результат можно вывести проще формальным путем, если рассматривать переносы как вращения на угол, равный нулю, с бесконечно удаленным центром. Такое представление легко наглядно истолковать. Действительно, если рассматривать ряд вращений, при которых угол поворота безгранично убывает, а центр вращения безгранично удаляется в определенном направлении, то легко убедиться, что получающиеся движения все менее отличаются от некоторого определенного переноса по крайней мере внутри некоторой конечной области.

При таком представлении каждое плоское движение есть поворот на определенный угол, который следует принять равным нулю в случае переноса. Следовательно, если мы осуществляем два поворота последовательно один за другим, то результат обоих поворотов можно заменить одним единственным поворотом, которому также должен соответствовать определенный угол.

Для *углов* поворота имеет место следующая простая *теорема сложения:* Сложение поворота на угол α и поворота на угол β всегда дает в сумме поворот на угол $\alpha + \beta$.

Действительно, мы уже упомянули вначале, что угол поворота может быть измерен по изменению направления любой прямой. Эта теорема имеет место также и для переноса в нашем новом определении, так как перенос оставляет все направления неизменными. Отсюда теорема очевидна. Из нее, между прочим, следует, что два поворота на равные углы в противоположном направлении и вокруг различных центров всегда приводят к параллельному переносу. В самом деле, угол поворота,

получающийся при сложении обоих движений, равен нулю, а тождественное преобразование получиться не может, так как ни один из центров вращений не остается неподвижным.

После этой предварительной подготовки мы снова обратимся к дискретным группам плоских движений. Теперь мы можем классифицировать их весьма просто. Мы должны только указывать, какие переносы и какие углы поворота и центры вращения имеют место. Оказывается целесообразным в первую очередь рассмотреть переносы. Здесь мы различаем следующие случаи:

I. *Все переносы, входящие в группу, имеют параллельное направление.*

II. *В группе имеются два переноса, направления которых не параллельны.*

Случай I охватывает также и те группы, которые вообще не содержат переносов.

Для подразделения обоих случаев теперь привлечем и повороты. Будем различать: 1) группы, не содержащие вращений; 2) группы, содержащие вращения.

Помимо характеристики группы при посредстве установления входящих в группу вращений и переносов можно определять каждую группу также при помощи простой геометрической фигуры, а именно при помощи фундаментальной области. Фундаментальной областью группы называется всякая связная область, не содержащая внутри себя ни одной пары эквивалентных точек, и притом такая область, которая не может быть расширена без того, чтобы это ее свойство не было утрачено. Такие фундаментальные области играют важную роль не только в группах движений, но и во всех дискретных группах отображений. В общем случае совсем нелегко определить фундаментальную область для заданной группы движений или даже вообще доказать существование фундаментальной области для некоторого семейства групп движений. Однако для дискретных групп плоских движений всегда можно легко построить фундаментальную область. Оказывается, что в случае I всякая фундаментальная область простирается в бесконечность, в то время как в случае II фундаментальные области всегда конечны.

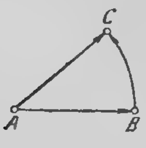
Упомянем еще некоторые соотношения, всегда имеющие место между поворотами и переносами группы, которые нам придется часто применять и которые поэтому мы перечислим как леммы.

1. Лемма. Если группа содержит поворот вокруг некоторой точки P на угол α и если точка Q эквивалентна точке P, то группа содержит также поворот вокруг точки Q на тот же угол α.

Доказательство. По предположению группа содержит движение b, переводящее точку P в точку Q, и поворот d вокруг точки P на угол α. Применяя обозначения предыдущего параграфа, рассмотрим теперь движение $b^{-1}db$, которое согласно обоим постулатам о группах также содержится в группе. Это движение должно представлять поворот на угол α; в самом деле, если β есть угол поворота в движении b, то угол поворота движения $b^{-1}db$ по теореме о сложении углов поворота равен $-\beta+\alpha+\beta=\alpha$. Но центром поворота должна служить точка Q, так как Q при движении b^{-1} переходит в P, P при движении d остается неподвижной и переходит снова в Q при движении b.

2. Лемма. Если группа содержит поворот на угол α и перенос t, то она содержит также перенос t', образующий угол α с движением t и совпадающий по величине с переносом t.

Доказательство. Пусть d — содержащийся в группе поворот на угол α с центром в точке A. Пусть при движении t точка A переходит в точку B, а при движении d точка B переходит в точку C (черт. 61).

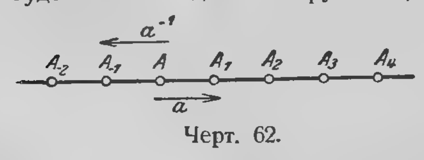


Черт. 61.

Тогда имеем просто $t'=d^{-1}td$. В самом деле, определенное таким образом движение принадлежит к группе и согласно теореме о сложении углов поворота представляет перенос. Остается только доказать, что при этом точка A переходит в точку C. В самом деле, при движении d^{-1} точка A остается неподвижной, затем при движении t она переходит в точку B и наконец при движении d она переходит из B в C.

Согласно этой теореме, например, группы семейства I не могут содержать других углов поворота кроме π, если группа вообще содержит поворот. В самом деле, в противном случае наряду с одним направлением переноса существовало бы другое, ему не параллельное.

11. Дискретные группы плоских движений с бесконечной фундаментальной областью. Сначала мы рассмотрим случай I, дающий простейшие группы, и прежде всего случай I,1; в этом случае мы будем иметь дело с группами, не содержащими поворотов. Будем исходить из произвольной точки A (черт. 62).



Черт. 62.

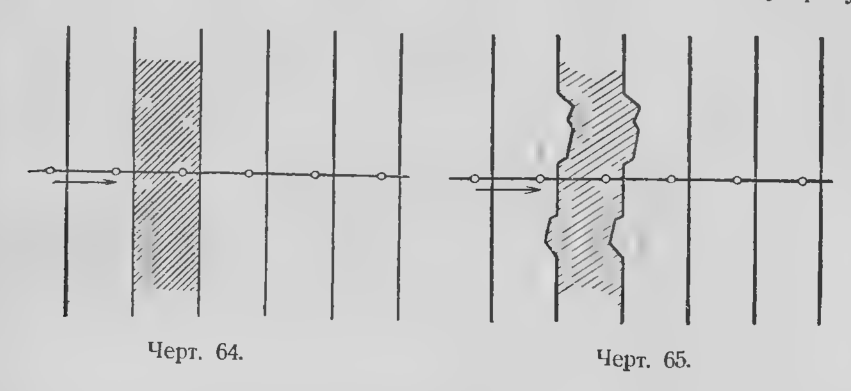
Так как на конечном расстоянии от A имеется только конечное число точек, эквивалентных A, то среди них должна быть точка A_1, находящаяся на наименьшем расстоянии от A; конечно, таких точек наименьшего расстояния от A может быть несколько; выберем из них одну. Движение a, входящее в группу, переводящее точку A в точку A_1, должно быть переносом, ибо по предположению в группу не входят повороты. Если теперь мы продолжим отрезок AA_1 на равное ему расстояние за точку A_1 до точки A_2, то точка A_2 должна быть эквивалентна точке A. В самом деле, точка A_2 получается из точки A при помощи переноса aa. Точно так же на прямой AA_1 лежат и другие точки A_3, A_4, ..., также эквивалентные точке A и расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга. Эти точки получаются из точки A, если повторять перенос a произвольное число раз. Точно так же и по другую сторону от точки A на прямой AA_1 расположено бесконечно много точек A_{-1}, A_{-2}, ..., находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга и эквивалентных точке A, которые получаются из точки A, если применить движение a^{-1} один или много раз. Мы утверждаем, что эта шкала на прямой AA_1 полностью исчерпывает все точки, эквивалентные точке A. В самом деле, все переносы, входящие в группу, по предположению должны быть направлены параллельно отрезку AA_1, следовательно, всякая точка, эквивалентная точке A, должна лежать на прямой AA_1. Если бы мы обнаружили такую точку A', не совпадающую ни с каким делением нашей шкалы, то эта точка должна была бы лежать внутри некоторого интер-

вала $A_n A_{n+1}$ (черт. 63), тогда отрезок $A_n A'$ был бы короче, чем AA_1. Но при помощи переноса, содержащегося в группе, мы можем перевести точку A_n в точку A; при этом точка A' перейдет в некоторую точку A'', находящуюся на более близком расстоянии от точки A, чем A_1. Но это противоречит тому, что с самого начала точка A_1 была выбрана как точка, эквивалентная точке A и находящаяся от нее на кратчайшем расстоянии.

Черт. 63.

Это рассмотрение целиком исчерпывает случай I,1; в самом деле, мы нашли все точки, эквивалентные произвольной точке, и вместе с тем все движения, которые вообще содержатся в группе, — ими оказались переносы a и a^{-1}, примененные один или много раз. Таким образом все группы вида I,1 по существу тождественны.

Для того чтобы установить фундаментальную область, можно просто исходить от некоторой прямой, не параллельной прямой AA_1, например от перпендикуляра к этому отрезку. Движение a отображает эту прямую



Черт. 64. Черт. 65.

на параллельную ей прямую, и очевидно, что полоса, заключенная между этими двумя параллельными прямыми, представляет фундаментальную область [1]) (черт. 64). В самом деле, две внутренние точки этой полосы ни в коем случае не могут быть эквивалентными. Так как, с другой стороны, обе граничные прямые этой полосы эквивалентны друг другу, то невозможно добавить к этой полосе какой-нибудь кусок без того, чтобы расширенная таким образом область не содержала пары эквивалентных точек. Однако можно произвольно изменять фундаментальную область другим способом так, что она не потеряет своих свойств. Для этого следует только поступать так: с одной стороны добавлять к полосе кусок, а с другой стороны вырезать эквивалентный кусок (черт. 65). Подобного рода изменения допускают также фундаментальные области всех рассматриваемых ниже групп и вообще

---

[1]) При этом следует твердо установить, что, например, точки левой граничной прямой включаются в фундаментальную область, а точки правой, наоборот, не включаются; в противном случае либо в фундаментальную область входили бы эквивалентные точки, либо область была бы неполной.

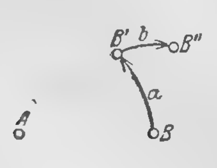
всех групп отображений. Обычно среди всех возможных видов фундаментальной области выбирают простейшую по своей форме.

Если подвергнуть всю фундаментальную область переносу a, то мы получим конгруэнтную, граничащую с первой, полосу. Таким образом можно покрыть однократно и непрерывно всю плоскость фундаментальными областями группы. Подобное же явление имеет место для всех других рассматриваемых ниже групп, и можно вообще доказать, что фундаментальные области произвольных дискретных групп отображений всегда примыкают друг к другу, не перекрывая одна другую и не оставляя щелей. Впрочем, они не должны всегда заполнять всю плоскость, как это мы увидим на одном примере ниже (см. конец § 36).

Группа I,1 не приводит ни к какой правильной точечной системе, так как все точки, эквивалентные определенной точке, образуют прямолинейную шкалу, и таким образом первое определяющее точечную систему требование остается невыполненным.

Тем не менее рассмотрение этих групп имеет значение для изучения точечных систем. Именно, если мы рассмотрим совокупность всех переносов, содержащихся в произвольной, сколь угодно сложной дискретной группе движений, параллельных какому-нибудь одному переносу, содержащемуся в группе, то такая совокупность переносов снова образует группу, так как для нее выполнены оба постулата о группах. Группа, содержащаяся в другой более общей группе, называется ее подгруппой. Всякая подгруппа дискретной группы также должна быть дискретной. Отсюда мы можем заключить, что выбранная совокупность переносов представляет группу I,1 и обладает указанной нами структурой, независимо от того, из какой общей группы мы исходили. Подобного рода заключения мы будем часто применять в дальнейшем.

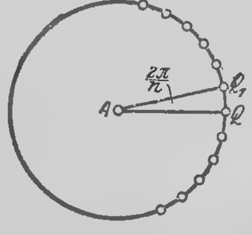
Рассмотрим теперь случай I, 2, т. е. группы, содержащие вращения, но не содержащие двух переносов в непараллельных направлениях. Теперь нам нужно будет различать случаи, когда группа содержит какой-нибудь перенос или вовсе не содержит переноса. Мы начнем с простейшего возможного случая, — назовем его I, 2,α, — когда группа не содержит никаких переносов. Мы утверждаем, что в этом случае все повороты должны иметь один и тот же центр. В самом деле, если бы было два поворота a и b с двумя различными центрами A и B, то содержащееся в группе движение $a^{-1}b^{-1}ab$ должно было бы представлять согласно теореме о сложении углов поворотов либо перенос, либо тождественное преобразование. Положим, что точка B' представляет изображение точки B при повороте a (черт. 66); тогда точка B' была бы отлична от точки B, так как согласно предположению точка B отлична от точки A, а при повороте остается неподвижной только одна точка — центр поворота. Поэтому, если точка B'' представляет изображение точки B' при повороте b, то и точка B'' должна быть отлична от точки B'.



Черт. 66.

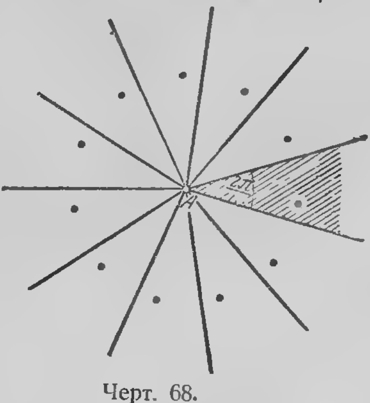
Но легко видеть, что тогда точка B' при движении $a^{-1}b^{-1}ab$ перешла бы как раз в точку B''. Следовательно, движение $a^{-1}b^{-1}ab$ было бы не тождественным преобразованием, а переносом, что противоречит предположению о том, что группа не содержит переносов.

Пусть теперь точка A — центр (единственный) поворотов группы, а точка Q — произвольная другая точка. Тогда все точки, эквивалентные точке Q, лежат на окружности, проведенной через точку Q с центром в A. Вследствие дискретности группы возможно только конечное число точек, эквивалентных точке Q; а так как совокупность таких точек при всяком содержащемся в группе повороте вокруг точки A должна переходить сама в себя, то все эквивалентные точки должны лежать на окружности на равных расстояниях друг от друга (черт. 67). Пусть точка Q_1 представляет одну из двух ближайших к точке Q точек, т. е. угол QAQ_1 представляет наименьший угол поворота, содержащийся в группе; если n — число точек, эквивалентных точке Q (включая и точку Q), то этот угол должен быть равен $\frac{2\pi}{n}$, и все содержащиеся в группе движения состоят из поворотов вокруг точки A на положительный или отрицательный угол, кратный этому углу, причем существует только конечное число геометрически различных поворотов. Таким образом случай I, 2, α разобран. В качестве фундаментальной области здесь следует взять часть плоскости, заключенную между двумя сторонами угла, имеющего вершину в точке A и равного $\frac{2\pi}{n}$ (черт. 68). Таким образом фундаментальная область опять бесконечна, и группа не приводит ни к какой точечной системе, так как для всякой точки имеется лишь конечное число эквивалентных точек, и потому первое требование, выставленное на стр. 58, не выполнено.



Черт. 67.

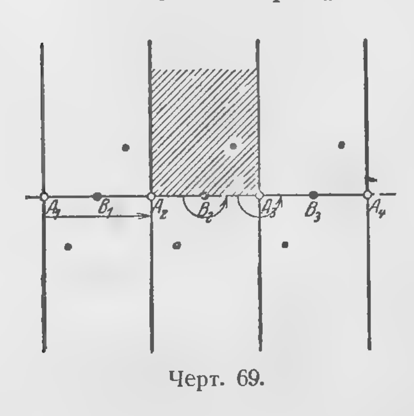
Эта группа имеет для остальных дискретных плоских групп движений такое же значение, как и только что рассмотренная группа переносов. Если какая-нибудь из таких групп содержит поворот вокруг точки A, то совокупность поворотов вокруг точки A, содержащихся в группе, образует дискретную подгруппу и должна представлять группу типа I, 2, α. Отсюда следует, что угол каждого из этих поворотов должен представлять кратное угла $\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, мы можем охарактеризовать точку A целым числом n и назвать эту точку n-кратным центром поворотов.



Черт. 68.

Теперь нам остается среди групп типа I рассмотреть еще случай I, 2, β. В этом случае группа должна содержать поворот d и перенос t, причем все остальные переносы должны быть параллельны переносу t. Согласно второй лемме (стр. 64) поворот d должен иметь угол π, причем должны существовать только двукратные центры поворотов. Пусть A_1 такой центр (черт. 69). Совокупность всех переносов группы должна представлять группу типа I,1. Рассмотрим прямолинейную

шкалу $A_1A_2\ldots$ точек, эквивалентных точке A_1, соответствующую этой подгруппе. Согласно первой лемме (стр. 63) все эти точки должны представлять двукратные центры поворотов. Мы утверждаем, что кроме того все середины B_1, B_2, $\ldots$ отрезков A_nA_{n+1} представляют двукратные центры поворотов. Действительно, если t представляет перенос, который переводит точку A_1 в точку A_2, а a_2 — поворот на угол π вокруг точки A_2, то при помощи движения ta_2 пара точек A_1A_2 переводится в A_2A_1; в самом деле, перенос t переводит A_1A_2 в A_2A_3, а поворот a_2 переводит A_2A_3 в A_2A_1. Так как поворот вокруг точки B_1 на угол π точно так же переводит пару точек A_1A_2 в A_2A_1, то движение ta_2 должно быть тождественным с этим поворотом, и следовательно, точка B_1 представляет двукратный центр поворотов, и значит, вся шкала, соответствующая точке B_1, т. е. совокупность всех точек B_n, должна состоять из двукратных центров поворотов. Кроме центров поворотов A_n и B_n не существует никаких других. В самом деле, если A есть одна из точек A_n,



Черт. 69.

а C — произвольный, отличный от A центр поворотов группы (черт. 70), то C во всяком случае должен быть двукратным центром. Пусть c есть соответствующий поворот на угол π; тогда рассмотрим движение ac, где a представляет поворот вокруг точки A на угол π. Если A' есть изображение точки A при повороте c, то точка C есть середина отрезка AA', и движение ac точно так же переводит точку A в точку A'. Но согласно теореме о сложении углов поворотов движение ac должно представлять перенос, а потому точка A' есть одна из тех точек, которые получаются из точки A при одном из переносов, содержащихся в группе, т. е. точка A' есть одна из точек $A_1A_2, \ldots$, а точка C как середина отрезка AA' непременно должна быть одной из точек A_n или B_n.

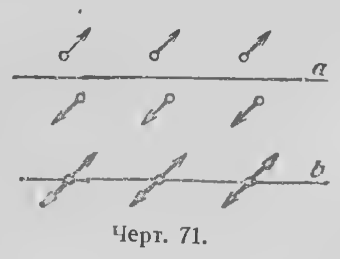
Черт. 70.

Таким образом мы полностью обозрели все группы типа I, 2, β. На черт. 69 изображены оба класса центров поворотов и соответствующая фундаментальная область. При этом следует обратить внимание, что ни одна из точек A_n не может быть эквивалентна ни одной из точек B_n, так как при всяком повороте и всяком переносе, содержащемся в группе, каждая из обеих шкал переходит сама в себя.

Кроме того на черт. 69 изображены некоторые из эквивалентных друг другу точек, отличные от центров поворотов. Они расположены зигзагообразно. Так как они умещаются в полосе конечной ширины, то они не выполняют первого требования, которое мы предъявили к точечной системе, ибо число этих точек внутри круга с возрастающим радиусом, очевидно, увеличивается пропорционально только первой степени радиуса. Точно так же, как в обеих предшествующих группах, и здесь фундаментальная область бесконечна.

Системы эквивалентных точек, не являющихся центрами поворотов, можно представить в виде двух конгруэнтных и параллельно расположенных шкал; подобным же образом при рассмотрении более сложных групп мы придем к системам конгруэнтных, параллельно расположенных решеток. Очевидно, возможность различных шкал и решеток обусловлена существованием поворотов. В самом деле, в нашем случае одна шкала переходит в другую при всяком повороте, содержащемся в группе, и только шкалы центров поворотов представляют исключение.

Так как точка вследствие всесторонней симметрии непригодна для изображения вращений, то будет нагляднее прибегнуть для изображения совокупности всех эквивалентов не к точкам, а к другим простым фигурам. Простейшей фигурой, не обладающей всесторонней симметрией, является «стрелка», т. е. точка с выходящим из нее направлением. На черт. 71, a,b изображены системы эквивалентных стрелок для группы I,2,β. В зависимости от того, возьмем ли мы за начало стрелки произвольную точку или же центр вращения, мы придем к двум различным типам фигур. В первом случае особенно наглядно преимущество введения стрелки: обе шкалы отличаются друг от друга различным направлением стрелок, в то время как все стрелки одной и той же шкалы направлены одинаково.



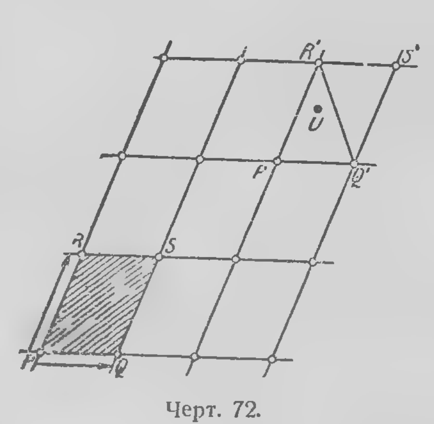
Черт. 71.

12. Кристаллографические группы движений на плоскости. Правильные системы точек и стрелок. Построение плоскости из конгруэнтных областей. Обратимся теперь к случаю II, т. е. к группам, содержащим два переноса в непараллельных направлениях. Оказывается, что все эти группы в противоположность группам типа I всегда приводят к точечным системам, а потому мы можем их назвать в соответствии со сказанным на стр. 60 кристаллографическими группами. С этим связано то, что все эти группы имеют конечные фундаментальные области. При рассмотрении этих групп прежде всего мы снова наталкиваемся на плоские точечные решетки. Как мы уже упоминали, фигуры, образованные эквивалентными точками и стрелками, всегда образуют или плоскую точечную решетку или могут быть представлены как системы нескольких, параллельно расположенных, конгруэнтных решеток.

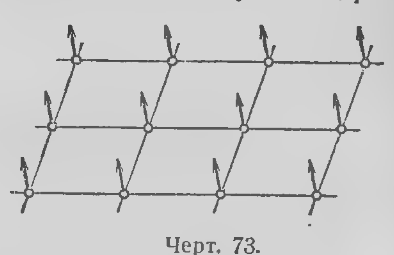
Мы разбили на стр. 63 случай II на два вида: прежде всего мы рассмотрим более простой вид II, 1, когда группа не содержит поворотов, но содержит два переноса в непараллельных направлениях. В этом случае оказывается, что все точки, эквивалентные некоторой точке, всегда образуют плоскую точечную решетку.

Для доказательства будем исходить от произвольной точки P, причем будем искать такой перенос t, содержащийся в группе, который переводит точку P в возможно более близко расположенную эквивалентную точку Q (черт. 72). Тогда переносы, направленные параллельно t, образуют шкалу других эквивалентных точке P точек на прямой PQ. Но согласно предположению в группе имеются кроме того переносы, не параллельные прямой PQ; среди этих переносов опять будем искать такой пере-

нос t', содержащийся в нашей группе, который переводит точку P в возможно более близко расположенную точку R. Тогда во всяком случае имеем $PR \geqslant PQ$. Если S точка, в которую переходит точка Q при переносе t', то точки $PQRS$ образуют параллелограм, и очевидно, что порождаемая этим параллелограмом решетка состоит только из эквивалентных точек. В самом деле, все эти точки получаются из точки P, если применить движение t (или t^{-1}), а затем t' (и и t'^{-1}) определенное число раз. Мы утверждаем теперь, что не существует других точек, эквивалентных точке P, т. е. что все переносы, содержащиеся в группе, могут быть составлены из переносов t и t'. В самом деле, в противном случае группа содержала бы некоторый перенос u, переводящий точку P в точку U, не принадлежащую к нашей решетке. Тогда мы могли бы построить определенный параллелограм решетки $P'Q'R'S'$, конгруэнтный параллелограму $PQRS$ (черт. 72) и содержащий U. Из двух конгруэнтных треугольников $P'Q'R'$ и $S'Q'R'$ один, например первый, должен был бы содержать U. Но группа должна была бы в этом случае содержать



Черт. 72.

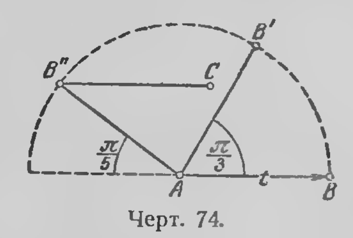

Черт. 73.

перенос $P' \to U$, который, очевидно, может быть составлен из содержащегося в группе переноса $P' \to P$ и переноса u. Но это приводит к противоречию, так как согласно вышеприведенному рассуждению мы должны иметь: $PR \geqslant PQ$, и потому в треугольнике $P'Q'R'$ точка R' должна быть наиболее удалена от точки P'. Поэтому перенос $P' \to U$ был бы короче, чем перенос t', переводящий точку P в точку R и, следовательно, точку P' в точку R'. Вследствие этого перенос $P' \to U$ должен был бы быть переносом параллельным переносу t и точка U должна была бы лежать на отрезке $P'Q'$. Но тогда и перенос $P' \to U$ был бы короче, чем t; между тем перенос t был выбран как кратчайший из переносов, содержащихся в группе. Подобным же образом можно провести доказательство, предполагая, что точка U расположена в треугольнике $S'Q'R'$. Тогда следовало бы рассмотреть вместо переноса $P' \to U$ перенос $S' \to U$, что подобным же образом привело бы к противоречию.

Таким образом эквивалентные друг другу точки групп вида II, 1 всегда образуют точечную решетку, и если использовать для изображения группы вместо точек стрелки, то мы получим решетку, составленную из параллельно расположенных стрелок (черт. 73).

Если теперь мы обратимся к последнему, остающемуся виду II, 2, т. е. к случаю, когда в группе содержатся также и повороты, то нам

следует принять во внимание только что выведенное следствие. Группы вида II, 2, как и в предыдущем случае, содержат два переноса, не параллельных друг другу. Поэтому совокупность содержащихся в группе вида II, 2 переносов должна непременно представлять подгруппу вида II, 1. Следовательно, если среди всех точек группы II, 2, эквивалентных произвольной точке P, мы станем рассматривать только совокупность таких точек, которые получаются из точки P с помощью переносов, то получим точечную решетку. Содержащиеся в группе повороты должны либо переводить эту решетку в самое себя, либо преобразовывать некоторую точку решетки в точку Q, не содержащуюся в решетке. Но переносы, содержащиеся в группе, опять-таки образуют из точки Q решетку, конгруэнтную решетке, образованной из точки P, и ориентированную параллельно последней, причем точки этой решетки всегда эквивалентны точкам Q и P. Но таким способом, который, очевидно, может быть продолжен до тех пор, пока еще остаются неиспользованные точки, эквивалентные точке P, мы можем получить только конечное число различных решеток, ибо в противном случае группа не была бы дискретной. Это рассуждение показывает, что может быть лишь сравнительно немного групп II, 2 и что соответствующие точечные системы всегда состоят из параллельно расположенных конгруэнтных решеток.



Черт. 74.

Итак, разобьем группы II, 2 по углам поворотов, содержащихся в них. Все эти углы поворотов должны иметь вид $\frac{2\pi}{n}$, где n—целое число, ибо повороты вокруг некоторой точки, содержащиеся в группе, образуют дискретную подгруппу типа I, 2, α. Теперь мы утверждаем, что число n не может принимать никаких других, отличных от 1 значений, кроме 2, 3, 4, 6. Для доказательства рассмотрим n-кратный центр A поворотов группы (черт. 74) и выберем в группе кратчайший перенос t; пусть он переводит точку A в точку B. При повороте на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг точки A точка B перейдет в точку B'. Согласно лемме 2 (стр. 64) группа содержит также перенос t', переводящий A в B'. Рассмотрим теперь движение $t^{-1}t'$, которое, очевидно, переведет точку B в точку B'. Согласно теореме о сложении углов поворотов $t^{-1}t'$ представляет перенос, а так как t было выбрано как кратчайший перенос группы, то отсюда следует $BB' \geqslant AB$, поэтому имеем $\sphericalangle BAB' = \frac{2\pi}{n} \geqslant \frac{\pi}{3}$ и, значит, $n \leqslant 6$. Теперь нам остается только исключить случай $n=5$. Для этой цели нам придется итти косвенным путем и выбрать точку A в качестве пятикратного центра поворотов (черт. 74). Пусть поворот вокруг точки A на угол $2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ переводит точку B в точку B''. Тогда группа должна содержать перенос t'', переводящий A в B''. Но тогда, очевидно, перенос $t''t$ должен перевести точку A в точку C; а так как точка C ближе

к точке A, чем точка B, то в группе содержался бы перенос, более короткий, чем t, что противоречит нашему предположению.

Таким образом в группах вида II, 2 могут встречаться только двух-, трех-, четырех- и шестикратные центры поворотов. Если угол φ есть наименьший, содержащийся в одной из таких групп угол поворота, то нам следует рассмотреть следующие типы групп:

$$\text{II, 2, } \alpha: \quad \varphi = \pi,$$

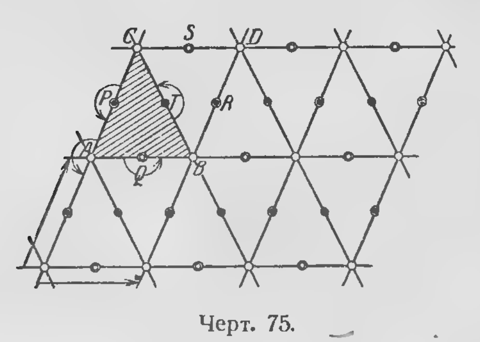
$$\text{II, 2, } \beta: \quad \varphi = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{II, 2, } \gamma: \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{II, 2, } \delta: \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Оказывается, что каждому из этих четырех случаев соответствует в точности одна группа.

II, 2, α. В этом случае в группе должен быть по крайней мере один двукратный центр поворотов A. Подгруппа переносов, содержащихся в группе, дает для точки A в качестве эквивалентных точек другие двукратные центры поворотов некоторой решетки: пусть $ABCD$ один из образующих решетку параллелограмов (черт. 75). Здесь мы можем вернуться к рассуждениям, которые мы проводили в отношении групп I, 2, β (стр. 67—68). В соответствии с ними середина отрезка, соединяющего две произвольные точки решетки, также должна представлять двукратный центр поворотов, и обратно, всякий двукратный центр поворотов должен делить пополам один из таких отрезков. Рассмотрим середину Q отрезка AB, середину P отрезка AC и середину T отрезков BC и AD.

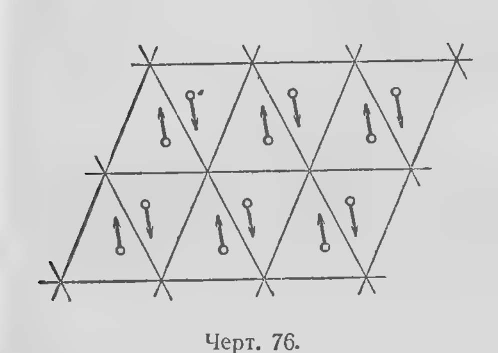


Черт. 75.

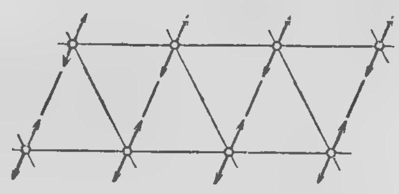
Все эти точки попарно неэквивалентны. Как только что указано, все они представляют двукратные центры поворотов и вместе с точками соответствующих им решеток исчерпывают все двукратные центры поворотов, содержащиеся в группе. Таким образом мы имеем четыре различных класса двукратных центров поворотов. Повороты вокруг этих точек и переносы решетки $ABCD$ исчерпывают все преобразования группы, так как согласно нашей предпосылке в группу не входят иные центры поворотов, кроме двукратных. В качестве фундаментальной области мы, очевидно, можем использовать треугольник ABC.

На черт. 76 и 77 изображены фигуры, составленные из эквивалентных стрелок, которые получаются в зависимости от того, будем ли мы исходить от некоторой точки, имеющей произвольное положение (черт. 76), или от центра поворотов (черт. 77). В первом случае мы получим две вставленные друг в друга решетки, которые отличаются одна от другой

противоположным направлением стрелок; во втором случае решетки совпадают, так как ко всякому центру поворотов принадлежат две стрелки. Если вместо стрелок рассматривать только точки, то каждая из обеих фигур образует одну правильную точечную систему. Но тогда система, изображенная на черт. 77, не отличается от системы, соответствующей черт. 72, т. е. от плоской решетки общего вида. Если, обратно, мы будем искать для плоской точечной решетки общего вида соответствующую группу совмещений, то мы получим не II, 1, но всегда II, 2, α,



Черт. 76.

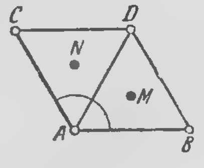


Черт. 77.

так как мы должны на черт. 75 выбирать параллелограм $ABCD$ совершенно произвольно, и соответствующая решетка при движениях, содержащихся в группе, будет переводиться сама в себя. Таким образом введение стрелок вместо точек приводит к более четкому различению решеток.

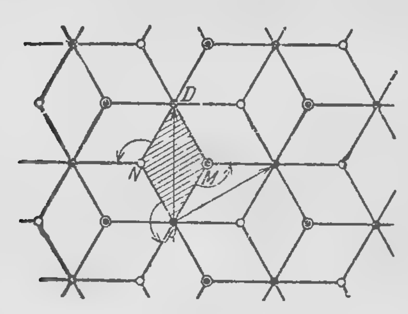
II, 2, β. Согласно нашему допущению наименьший содержащийся в группе угол поворота равен $\frac{2\pi}{3}$. Мы утверждаем, что повороты на угол $\pm\frac{2\pi}{3}$ являются единственными. В самом деле, из всех других углов может возникнуть вопрос только относительно угла π; но согласно теореме о сложении поворот на угол π и поворот на угол $-\frac{2\pi}{3}$ должны были бы привести к повороту на угол $\frac{\pi}{3}$, а такой поворот не может содержаться в группе. Таким образом мы убеждаемся, что в группе содержатся исключительно трехкратные центры поворотов.

Пусть A трехкратный центр поворотов (черт. 78) и $A \to B$ кратчайший из содержащихся в группе переносов. Если при повороте вокруг точки A на угол $\frac{2\pi}{3}$ точка B переходит в точку C, то согласно лемме 2 группа должна содержать также перенос $A \to C$. Решетка подгруппы переносов должна получаться из параллелограма $ABCD$, так как внутри этого параллелограма по построению не могут находиться никакие другие точки решетки. Диагональ AD разбивает параллелограм $ABCD$ на два равносторонних треугольника. Решетка переносов группы должна поэтому представлять наиболее плотное расположение кругов и не может быть выбрана произвольно, как в случае II, 2, α (точно так же и в двух



Черт. 78.

следующих случаях мы убедимся, что соответствующие решетки переносов должны иметь специальный вид). Поворот (d) $AB \to AC$ и перенос (t) $A \to B$ совместно (dt) переводят AB в BD (черт. 78). Следовательно, движение dt должно представлять поворот d' вокруг центра M треугольника ABD с углом поворота, равным $\frac{2\pi}{3}$. Таким образом точка M также является трехкратным центром поворотов группы. Далее, AC при движении $d''=td'$ переводится через BD в DA и, следовательно, d'' представляет поворот на угол $-\frac{2\pi}{3}$ вокруг центра N треугольника ACD; поэтому и N представляет трехкратный центр поворотов. Как и точка A, точки M и N приводят к решеткам, все точки которых суть трехкратные центры поворотов. Мы утверждаем, что этим исчерпываются все повороты группы. Для доказательства достаточно показать, что два трехкратных центра поворотов E и F не могут находиться друг от друга на расстоянии, меньшем, чем AM. Но движение $d^{-1}d'$, очевидно, есть перенос t. Точно так же и два противоположно направленных поворота вокруг точек E и F дают в результате перенос, длина которого должна так относиться к расстоянию EF, как длина переноса t относится к расстоянию AM. Так как согласно предположению в группе не существует переносов, более коротких, чем t, то и EF не может быть короче, чем AM. Таким образом в группе действительно не может быть других центров поворотов, кроме точек трех решеток, соответствующих точкам A, M, N. Так как повороты вокруг точки A переводят каждую из этих решеток в самое себя и не переводят одной решетки в другую, то точки A, M, N не эквивалентны. Поэтому группа II, 2, β содержит три различных класса центров поворотов (черт. 79). Точки каждого класса могут быть представлены как центры системы правильных шестиугольников, непрерывно и однократно покрывающих плоскость, вершины которых являются попеременно центрами поворотов двух других классов. Таким образом можно получить три системы правильных шестиугольников, перекрывающих определенным образом одна другую. Кроме того получающаяся фигура может быть представлена как ортогональная проекция трех, расположенных один над другим слоев решетки графита (черт. 56, стр. 56).



Черт. 79.

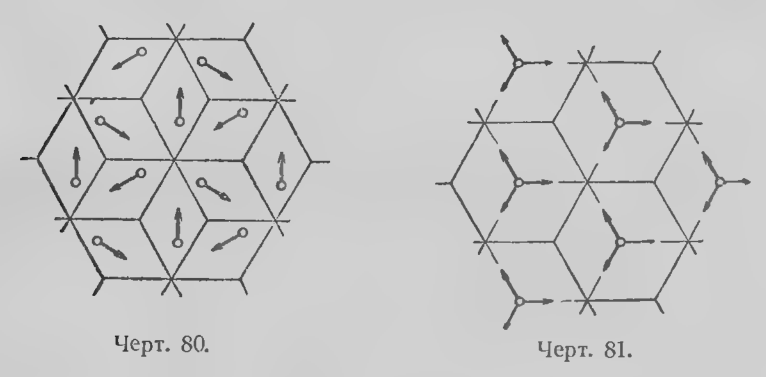
В качестве фундаментальной области на черт. 79 выбран ромб $AMND$ [1]); затем на этом же чертеже изображены два переноса, из которых получается решетка переносов группы.

Если рассматривать систему эквивалентных стрелок, не исходящих из центров поворотов (черт. 80), то можно получить три, вставленных

[1]) Такая же система граничащих друг с другом ромбов наблюдается в построении пчелиных сот.

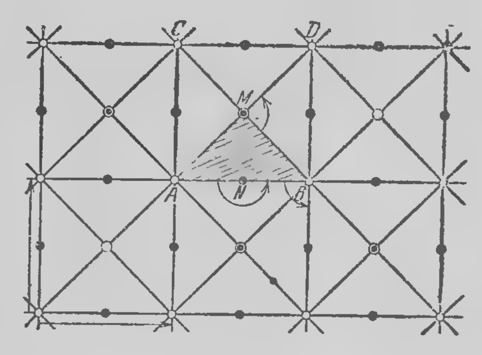
одна в другую решетки, каждая из которых характеризуется определенным направлением стрелок. Элементарный параллелограм решетки не изображен на чертеже, так как в таком случае чертеж потерял бы наглядность.

Если исходить от центра поворота (черт. 81), то все три решетки совпадают, так как из каждой точки должны выходить три стрелки.



Черт. 80. Черт. 81.

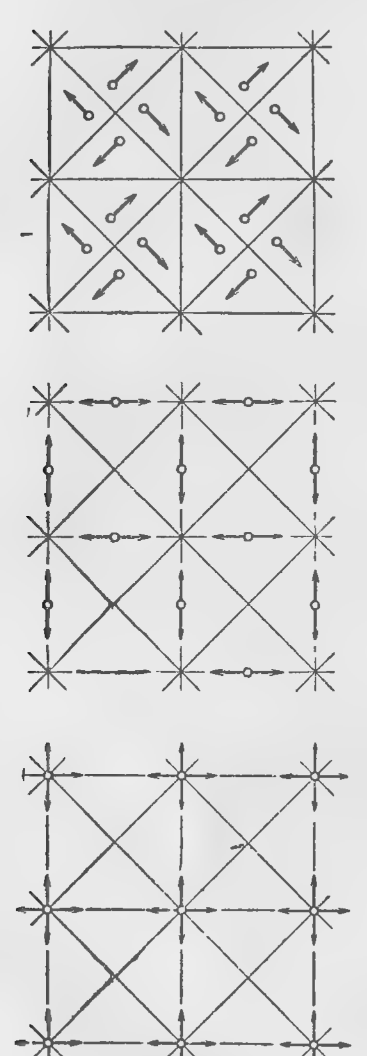
II, 2, γ. Наименьший угол поворота этой группы $\frac{\pi}{2}$; следовательно, в группе могут быть двух- и четырехкратные центры поворотов. Другие углы поворотов встречаться не могут, так как поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$ вместе с поворотом на угол π согласно теореме о сложении углов должен был бы привести к повороту на угол $\frac{\pi}{3}$, что противоречит нашему предположению о том, что в группе нет углов поворота, меньших $\frac{\pi}{3}$.



Черт 82.

Проведем исследование этого случая аналогично предыдущему. Пусть A какой-нибудь четырехкратный центр поворотов (черт. 82) и $A \rightarrow B$ кратчайший перенос этой группы. Если при повороте вокруг точки A на угол $\frac{\pi}{2}$ точка B переходит в точку C, то и $A \rightarrow C$ представляет перенос, также содержащийся в группе. Решетка переносов группы должна, следовательно, получаться из квадрата $ABCD$, так как вершинами этого квадрата служат точки решетки и квадрат не может содержать никаких других точек решетки. Следовательно, так же как в предыдущем случае, решетка переносов не произвольна, а имеет особенный симметричный вид. Если теперь мы добавим к переносам и повороты на угол π, но не на угол $\frac{\pi}{2}$, то мы получим подгруппу, которая должна быть группой вида II, 2, α. Центры квадратов, например точка M, так же как и середины сторон квадратов, например точка N, образуют вместе

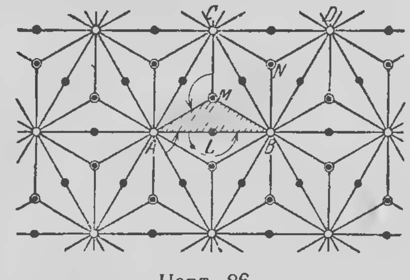
с вершинами квадратов полную систему центров поворотов подгруппы. Но и двукратные и четырехкратные центры поворотов всей группы мы должны искать также исключительно среди этих точек, так как эти точки должны были попасть в подгруппу в качестве двукратных центров. Если мы теперь рассмотрим поворот (d) $AB \rightarrow AC$ и перенос (t) $A \rightarrow B$, то, очевидно, движение $d' = dt$ переводит AB в BD, а потому d' представляет поворот вокруг точки M на угол $\frac{\pi}{2}$, и в соответствии с этим центры квадратов всегда являются четырехкратными, а не только двукратными центрами поворотов. Точно так же, как и в предыдущем случае, мы можем заключить, что других четырехкратных центров поворотов быть не может. В самом деле, $d^{-1}d'$ представляет кратчайший, содержащийся в группе перенос t, и следовательно, расстояние между двумя четырехкратными центрами поворотов не может быть короче, чем AM, а потому к решеткам, соответствующим точкам A и M, нельзя добавить никаких четырехкратных центров поворотов. Так как обе эти решетки переводятся каждым из рассмотренных движений в самих себя, а не друг в друга, то точки A и M не эквивалентны; но, с другой стороны, можно убедиться, что все двукратные центры поворотов эквивалентны. Таким образом мы имеем единственный класс двукратных центров поворотов, состоящий из двух вдвинутых одна в другую квадратных решеток, и два класса четырехкратных центров поворотов, состоящих каждый из одной решетки. В качестве фундаментальной области можно использовать треугольник AMB.


Черт. 83, 84, 85.

Система стрелок, соответствующая какой-нибудь произвольной точке (черт. 83), состоит из четырех квадратных решеток, каждая из которых характеризуется определенным направлением стрелок. Двукратный центр поворотов образует две решетки с различно направленными стрелками (черт. 84), а четырехкратный центр поворотов образует лишь одну единственную решетку (черт. 85). Если при этом, как на приведенном чертеже, стрелки попарно направлены друг к другу, то образуемую ими фигуру можно рассматривать как правильное плоское расположение одинаковых четырехвалентных атомов.

II, 2, δ. В этом случае мы получаем наибольшее многообразие поворотов. В самом деле, так как здесь возможны шестикратные центры поворотов, то могут существовать также и двукратные и трехкратные центры. Напротив, четырехкратные центры поворотов исключаются, так как при наличии поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ и на угол $\frac{\pi}{3}$ группа непременно содержала бы и поворот на угол $\frac{\pi}{6}$, а такой угол поворота не может иметь места ни в одной кристаллографической плоской группе движений.

Пусть точка A представляет шестикратный центр поворотов группы (черт. 86). Рассмотрим сначала подгруппу, состоящую из переносов и поворотов на угол $\frac{2\pi}{3}$. Структура этой подгруппы известна нам по типу II, 2, β. В этой группе центр поворотов A является трехкратным центром. Решетка переносов этой подгруппы представляет решетку, состоящую из равносторонних треугольников, причем наряду с вершинами, например точками A, B, C, центры треугольников, например точка M, также являются трехкратными центрами поворотов. Но отсюда можно заключить, что и в полной группе переносы образуют такую же решетку, так как все эти переносы входят в подгруппу. Таким образом в полной группе точка A представляет уже не трехкратный, а шестикратный центр поворотов, а потому и все точки решетки, образованной точкой A, должны быть шестикратными центрами. Если в группе имеются и другие шестикратные центры поворотов, то это могут быть только центры треугольников, так как все шестикратные центры поворотов уже были рассмотрены в подгруппе в качестве трехкратных центров. Два поворота вокруг точки A и вокруг точки C на угол $+\frac{\pi}{3}$ и угол $-\frac{\pi}{3}$ дают в совокупности перенос $A \to B$. Так как в группе не существует более коротких переносов, чем этот, то расстояние между шестикратными центрами поворотов не может быть меньше, чем AC; следовательно, не существует других шестикратных центров поворотов, кроме входящих в решетку, образованную точкой A; центры же треугольников образуют трехкратные центры поворотов. Других трехкратных центров не может существовать, так как все они уже были рассмотрены в подгруппе. В противоположность случаю II, 2, β трехкратные центры поворотов всегда эквивалентны, так как, например, точка M может быть переведена в точку N путем поворота вокруг точки B.

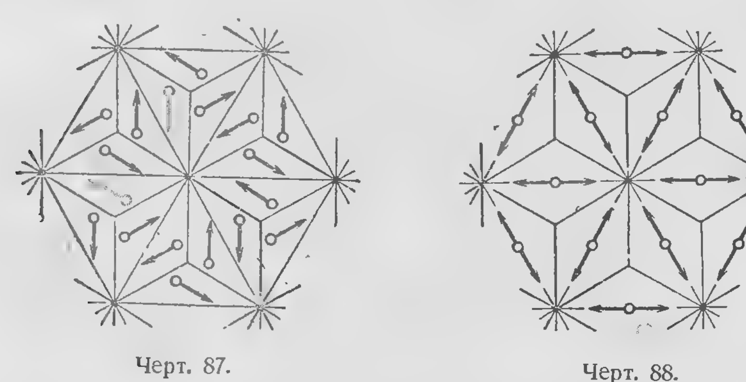


Черт. 86.

Теперь, чтобы отыскать двукратные центры поворотов, если они существуют, поступаем аналогичным образом: рассмотрим подгруппу, состоящую из переносов и поворотов на угол π. Из рассуждения по поводу случая II, 2, α следует, что вершины элементарного параллелограма решетки точно так же, как и центры параллелограмов и середины их сторон, т. е. середины сторон всех равносторонних треугольников, представляют центры пово-

ротов на угол π. Вершины треугольников мы уже рассмотрели в качестве шестикратных центров поворотов. Таким образом остаются только середины сторон треугольников как совокупность двукратных центров поворотов. Можно убедиться, что все они эквивалентны. Следовательно, в этом случае имеются три класса — по одному классу двукратных, трехкратных и шестикратных центров поворотов. Треугольник AMB представляет фундаментальную область группы.

Система стрелок произвольно взятой точки состоит из шести вдвинутых одна в другую решеток, каждая из которых характеризуется определенным направлением стрелки. На черт. 87 каждая из этих решеток представлена тройками стрелок, образующих равносторонний треугольник, причем стрелки каждой тройки соответственно параллельны стрелкам других троек. Если исходить от двукратного центра поворотов (черт. 88), то



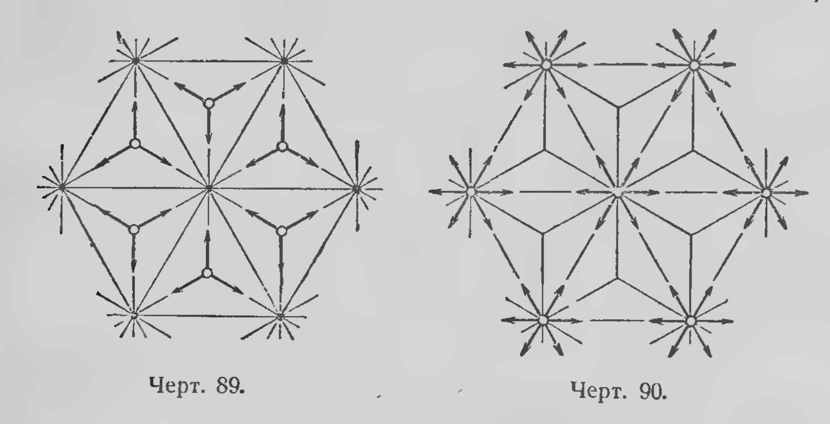
Черт. 87. Черт. 88.

решетки распадаются на две, причем каждая решетка состоит из трех совпадающих решеток. Эта фигура представляет возможное правильное плоское расположение комплекса из двух родов атомов, причем один род атомов шестивалентен, а другой двухвалентен. Если повернуть все стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$, то мы придем к расположению, при котором связываются двухвалентные и трехвалентные атомы. Система стрелок трехкратных центров поворотов (черт. 89) состоит из двух решеток. При расположении стрелок, указанном на чертеже, получается расположение трехвалентных и шестивалентных атомов. Система стрелок шестикратных центров поворотов (черт. 90) образует одну единственную решетку, которую при начерченном распределении стрелок можно представить как правильное плоское расположение однородных шестивалентных атомов.

Теперь мы полностью разрешили задачу, поставленную в § 9. Мы установили все вообще возможные кристаллографические группы движений на плоскости и при этом обнаружили, что таких групп существует только пять. Наиболее общие системы точек и стрелок мы получаем, если исходим в каждой группе от произвольно взятой точки, не являющейся центром поворотов. В самом деле, точечные системы, состоящие из центров поворотов, в случае более сложных групп сводятся к точечным системам общего расположения, если положить в основу более простые

группы. Напротив, системы стрелок в случае центров поворотов образуют фигуры нового вида.

Вместе с тем мы нашли решение задачи, родственной с рассмотренной выше, именно: сколькими различными способами можно построить плоскость из конгруэнтных конечных областей таким образом, чтобы все построение можно было совместить само с собой, причем каждый элемент можно привести к совпадению с любым другим. Группа таких совмещений должна быть дискретной и именно кристаллографической, так как число звеньев внутри некоторого круга возрастает до бесконечности пропорционально квадрату радиуса. Поэтому могут быть только две возможности: либо ни одно из отличных от тождества совмещений не оставляет неизменным ни одного звена, — и тогда это звено должно представлять фундаментальную область, либо имеются такие звенья, ко-



Черт. 89. Черт. 90.

торые при совмещении переводятся сами в себя, — и тогда совокупность совмещений подобного рода образует дискретную подгруппу, которая, очевидно, не содержит переносов и состоит, следовательно, из поворотов вокруг определенной точки (I, 2, α). В этом случае основное звено обладает центральной симметрией и должно составляться из фундаментальных областей. Пример такого случая представляют построения плоскости из правильных конгруэнтных шестиугольников или квадратов, которые часто применяются при устройстве паркетов.

Другую и более трудную задачу представляет общая задача о паркете: требуется построить плоскость из конечных конгруэнтных элементов, но при этом не требуется, чтобы построение допускало совмещения.

13. Кристаллографические классы и группы пространственных движений. Группы и точечные системы с зеркальной симметрией. В пространстве имеется также лишь конечное число кристаллографических групп движений. Однако это число значительно больше, чем на плоскости. Для того чтобы суметь определить эти группы, необходимо так же, как и в случае плоскости, прежде всего охарактеризовать геометрически отдельные движения. В пространстве также можно заменить произвольное движение определенными движениями более простого типа. Если сначала рассмотреть движения, оставляющие неподвижной некоторую точку, то можно доказать, что в этом случае должны остаться непо-

движными все точки некоторой прямой, проходящей через данную точку, и что движение может быть заменено поворотом на определенный угол вокруг этой прямой, как вокруг оси. Пространственными движениями, не оставляющими неподвижной ни одной точки, являются, например, параллельные переносы.

Можно доказать, что всякое произвольное движение пространства может быть составлено из определенного поворота и определенного переноса в направлении поворотной оси; можно также рассматривать самый поворот и перенос как составленные таким же образом движения, если принять, что при этом одна составляющая часть движения сводится к тождественному преобразованию. Если в самом общем случае принять, что поворот и перенос происходят одновременно и с постоянной скоростью, то мы получим винтообразное движение пространства. Наиболее общее движение пространства характеризуется поэтому как винтовое движение, причем перенос и поворот можно представлять себе как предельные случаи винтового движения. Кроме того во многих случаях целесообразно рассматривать переносы, так же как и на плоскости, как повороты на исчезающе малый угол вокруг бесконечно удаленной оси.

При сложении двух винтовых движений в пространстве не существует такого простого общего закона, какой в случае плоскости представляет теорема о сложении углов при сложении поворотов. Однако имеются две специальные теоремы, вполне достаточные для целей пространственной кристаллографии. Первая теорема состоит в том, что сложение двух переносов всегда дает опять перенос, а вторая — в том, что винтовые движения вокруг параллельных осей и с равными углами поворота отличаются друг от друга только на перенос.

Согласно первому закону переносы, содержащиеся в группе пространственных движений, всегда образуют подгруппу. Так же как и на плоскости, структура этой подгруппы является критерием того, будет ли дискретная группа пространственных движений кристаллографической, т. е. приводит ли она к некоторой пространственной точечной системе или нет. Именно, если все переносы группы параллельны некоторой неподвижной плоскости, то группа всегда имеет бесконечную фундаментальную область и не может приводить ни к какой точечной системе. Если же, напротив, группа содержит три переноса, направления которых не параллельны одной и той же плоскости, то эта группа является кристаллографической группой. В этом случае точки, эквивалентные некоторой точке P относительно подгруппы переносов, всегда образуют пространственную точечную решетку. Если кроме того группа содержит еще и винтовое движение, переводящее точку P в некоторую точку Q, не принадлежащую решетке, то подгруппа переносов определяет также и для точки Q решетку, состоящую только из точек, эквивалентных точкам Q и P. Вследствие дискретности группы возможно только конечное число таких решеток. Это ограничение позволяет, так же как и на плоскости, обозреть все возможные случаи. Вместе с тем оказывается, что правильные точечные системы в пространстве могут быть составлены из конечного числа конгруэнтных, параллельно вдвинутых одна в другую, пространственных точечных решеток. Пример этого мы уже

имели в системе, состоящей из центров шаров при тетраэдральном расположении.

Вторая из упомянутых теорем — относительно винтовых движений с параллельными осями — приводит к очень важному геометрическому методу, позволяющему охватить различные движения группы, отличные от переносов.

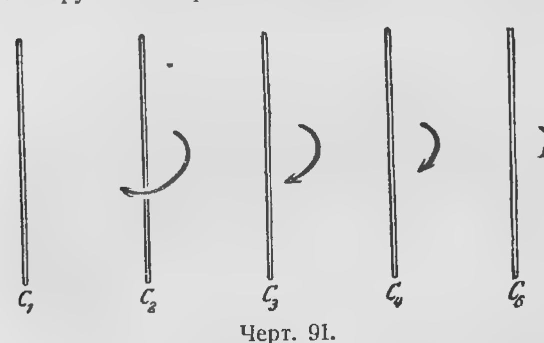
Для этой цели возьмем произвольную точку пространства M. Для всякого винтового движения, содержащегося в группе, мы будем проводить через точку M линию a_0, параллельную оси поворота a, и таким образом всякому винтовому движению s вокруг оси a, содержащемуся в группе, мы поставим в соответствие поворот s_0 вокруг оси a_0 с тем же углом поворота. Тогда s и s_0 могут отличаться друг от друга только на перенос. При таком способе всякому отличному от переноса движению группы G соответствует другое движение, при котором точка M остается неподвижной. Для того чтобы соответствие было полным, поставим далее в соответствие всем переносам группы G тождественное преобразование. Таким образом группе G соответствует система движений G_M, оставляющих точку M неподвижной. Мы утверждаем, что G_M представляет группу. В самом деле, если повороты s_0 и t_0 системы G_M соответствуют винтовым движениям s и t группы G, то можно заключить из закона о винтовых движениях вокруг параллельных осей, что s_0t_0 представляет как раз тот поворот из системы G_M, который должен соответствовать винтовому движению st. Таким образом система G_M действительно удовлетворяет обоим постулатам группы, а именно, если вращения s_0 и t_0 принадлежат этой системе, то тогда и вращение s_0t_0, так же как и вращение s_0^{-1}, принадлежит к этой же системе.

Структура группы G_M отнюдь не однозначно определяет группу G; именно, из структуры группы G_M ничего нельзя заключить относительно переносов, содержащихся в группе G; так, например, всем группам G, состоящим только из переносов, соответствует одна и та же группа G_M, состоящая только из одного тождественного преобразования. Группа G_M таким образом соответствует всем группам, отличающимся друг от друга только содержащимися в них переносами. Совокупность всех пространственных групп движений, приводящих к одной и той же группе G_M, называется *классом пространственных групп движений*. Если к такому классу принадлежит кристаллографическая группа, то этот класс называется *кристаллографическим классом*. Это понятие имеет большое значение не только для практической кристаллографии, но также и для геометрического определения пространственных групп. Именно, гораздо легче сначала установить все возможные кристаллографические классы и только потом исследовать для каждого класса, какие группы могут принадлежать к нему.

Так как все движения группы G_M оставляют точку M неподвижной, то они переводят также поверхность шара с центром в точке M в самое себя, и поэтому можно рассматривать группы G_M как группы движений поверхности шара. Мы приходим к большому упрощению благодаря тому, что в тех случаях, когда группа G дискретна, группа G_M должна быть также дискретной. Так как дискретность группы G означает нечто совсем другое, чем дискретность группы G_M, то эта теорема отнюдь не

является сама собой очевидной. Однако ее можно легко доказать для кристаллографических групп, если рассмотреть соответствующие решетки переносов. Мы не будем приводить здесь этого доказательства.

Теперь, для того чтобы найти все кристаллографические классы пространственных групп движений, нам нужно только исследовать дискретные группы движений поверхности шара Но тут мы приходим еще ко второму упрощению. Точно так же, как и на плоскости, можно и для пространства притти к заключению, что в кристаллографической группе движений не могут существовать иные углы поворота, кроме углов, кратных π, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$. Таким образом, подобно тому как на плоскости группы содержат только двух-, трех-, четырех- и шестикратные центры поворотов, и пространственные кристаллографические группы движений (при аналогичном словоупотреблении) могут содержать только двух-, трех-, четырех- и шестикратные оси. Но то же самое должно иметь место и для групп G_M кристаллографических классов. После этого ограничения остаются только одиннадцать классов кристаллов; мы их сейчас перечислим.



Черт. 91.

Прежде всего возьмем случаи, когда существует только одна единственная n-кратная ось в группе G_M. Такие классы обозначаются в кристаллографии через C_n. Мы имеем здесь пять классов (черт. 91):

1. C_1 (тождество, класс групп переносов)
2. C_2
3. C_3
4. C_4
5. C_6

Теперь допустим, что существует несколько осей, среди которых не более одной кратности выше 2. Эта последняя, исключительная, n-кратная ось называется главной осью, а двукратные оси — побочными осями. В этом случае из постулатов о группе можно легко заключить, что должно быть в точности n побочных осей и что все они должны быть расположены перпендикулярно к главной оси и образовывать друг с другом одинаковые углы. Относящиеся сюда группы и классы обозначаются символом D_n (диэдр). Таких классов имеется четыре (черт. 92):

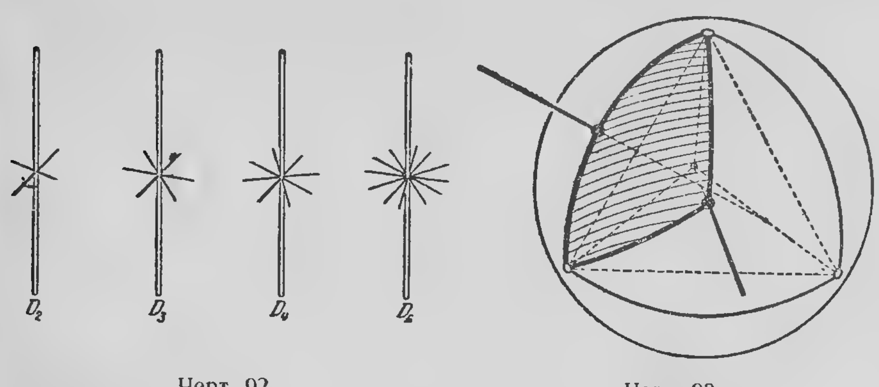
6. D_2 (три равнозначных оси)
7. D_3
8. D_4
9. D_6

Можно легко убедиться, что для $n=3$ побочные оси все эквивалентны, в то время как во всех остальных случаях эти оси разбиваются на два класса так, что попеременно принадлежат к разным классам.

Остается еще возможность существования нескольких осей более высокой кратности, чем двукратные. Более подробное рассмотрение таких случаев показывает, что эквивалентные точки на шаре должны располагаться либо в вершинах правильного тетраэдра (T), либо правильного октаэдра (O). Свойства симметрии этих многогранников позволяют непосредственно вывести распределение осей; все оси получаются, если соединить с центром шара все вершины, все центры граней и все середины ребер многогранников. Таким образом тетраэдр образует класс:

10. T (черт. 93).

Если соединить центр шара с одной из вершин тетраэдра, то прямая эта пройдет также через центр противолежащей грани. Так как эта грань представляет равносторонний треугольник, а с другой стороны, в каждой



Черт. 92.

Черт. 93.

вершине сходятся три грани, то мы получаем *четыре трехкратных оси*. Если, далее, соединить шесть середин ребер тетраэдра с центром шара, то мы получим не шесть, а только три прямых, так как середины ребер попарно диаметрально противоположны. Эти оси могут быть только двукратными, если тетраэдр должен переходить сам в себя. Таким образом класс T содержит *три двукратных оси*, которые кроме того попарно перпендикулярны друг другу.

Для того чтобы получить фундаментальную область на шаре, можно исходить из сферического треугольника, соответствующего грани тетраэдра. Однако такой треугольник отнюдь не представляет еще фундаментальной области, так как при вращении вокруг трехкратной оси он переходит сам в себя. Но этот треугольник, очевидно, можно построить из трех фундаментальных областей (черт. 93).

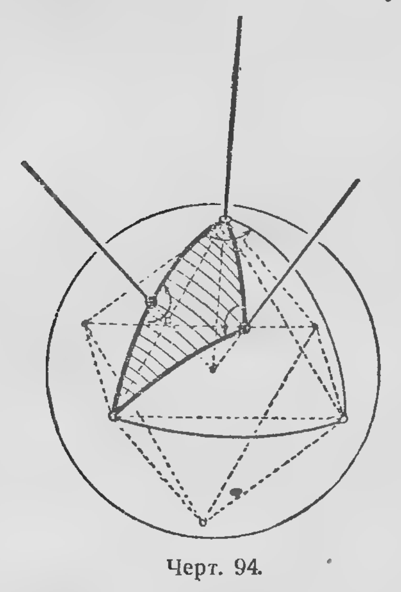
Исследование последнего класса:

11. O (черт. 94).

производится аналогично. Шесть вершин октаэдра расположены попарно противоположно друг к другу и в каждой вершине сходятся четыре грани. Таким образом мы получаем *три четырехкратных оси*. Точно так же восемь граней октаэдра расположены попарно противоположно. Так как они всегда представляют равносторонние треугольники, то они дают *четыре трехкратных оси*. Наконец, так как октаэдр имеет двена-

дцать ребер, причем ребра попарно противоположны, то класс O содержит *шесть двукратных осей*. В качестве фундаментальной области мы можем использовать треть сферического треугольника, соответствующего грани октаэдра (черт. 94).

Одиннадцать классов, установленных нами, приводят всего к 65 пространственным кристаллографическим группам движений. Таким образом разделение на классы чрезвычайно облегчает обозрение такого большого количества групп. Понятие класса можно ввести точно таким же образом и на плоскости. Тогда мы получим дискретные группы движений окружности, причем это будут: простое тождество и повороты на углы, кратные π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$. Таким образом мы имеем только пять классов, а в каждом классе только одну кристаллографическую группу движений; поэтому деление на классы плоских кристаллографических групп движений не дает никаких преимуществ.



Черт. 94.

Так же как на плоскости, кристаллографические группы движений и в пространстве приводят к точечным системам, причем они связаны с задачей построения пространства из конгруэнтных конечных частей так, чтобы построение осуществлялось совмещениями, при которых всякая часть переводилась бы в любую другую. Эта задача еще не решена.

В интересах химии кристаллов целесообразно наряду с системами точек рассмотреть системы стрелок. В пространстве, однако, нельзя обойтись одной единственной стрелкой, так как здесь возможно и вращение вокруг направления стрелки. Здесь мы получим исчерпывающую ориентировку только в том случае, если припишем каждой точке две стрелки различной длины и направления.

Если теперь мы сравним найденные эмпирическим путем структуры кристаллов с геометрически определенным набором всех систем стрелок, то придем к поразительному результату: природа не только использовала весь этот геометрический набор полностью, но кроме того существует еще много структур кристаллов, которые не были охвачены нашим понятием правильных точечных систем, хотя и там все элементы равноправны. Именно, наше третье определяющее свойство точечной системы состояло в том, что все точки должны быть равноправны, причем равноправность характеризовалась тем, что всякая точка системы должна переводиться во всякую другую точку при *совмещении*. Если в качестве преобразований совмещения системы допустить также *зеркальные отражения*, то можно притти к более общему понятию точечной системы; при этом следует допустить зеркальные отражения плоскости по отношению к лежащей в этой плоскости прямой и зеркальные отражения пространства в одной

из плоскостей пространства. Эти более общего вида преобразования точно так же оставляют неизменными длины и углы. Такие преобразования приводят только к взаимной замене правой и левой сторон, причем зеркальные отражения пространства не могут быть получены из основного расположения путем непрерывного движения. Если под именем преобразований совмещения объединить все преобразования пространства, оставляющие неизменными длины и углы, то дискретные группы преобразований совмещений образуют совокупность, которая охватывает все дискретные группы движений, но кроме того содержит и другие многочисленные группы. Эти более общего вида группы также были определены полностью. Обозрение этих групп облегчается тем, что движения, содержащиеся в каждой из них, образуют подгруппу, т. е. группу, тип которой может быть определен, исходя из наших прежних рассмотрений. Деление на классы и группы как на плоскости, так и в пространстве можно перенести на совмещения, содержащие зеркальные отражения. Подобно винтовым движениям вокруг параллельных осей на одинаковые углы, зеркальные отражения в параллельных плоскостях или прямых отличаются друг от друга лишь на переносы. Приводимая таблица позволяет обозреть совокупность классов и групп, получаемых таким образом.

	Плоскость		Пространство	
	Кристалл. группы	Кристалл. классы	Кристалл. группы	Кристалл. классы
Движения	5	5	65	11
Преобразования, получающиеся путем зеркального отражения	12	5	165	21
Всего	17	10	230	32

Только добавление зеркальных отражений действительно дает все многообразие встречающихся в природе структур кристаллов.

Если теперь перейти к системе стрелок, то на плоскости и в пространстве необходимо добавить еще одну стрелку; в самом деле, стрелка на плоскости оставляет еще возможность зеркального отражения прямой, содержащей стрелку, и точно так же пространственная фигура из двух стрелок различной длины оставляет еще возможность зеркального отражения в плоскости стрелок. Поэтому в пространстве следует положить в основу три стрелки различной длины, выходящие из одной точки и не лежащие в одной и той же плоскости.

Дискретные группы преобразований совмещений можно определить не только геометрически, но также и арифметически-алгебраическим путем. В случае плоскости мы придем тогда к замечательным соотношениям между комплексными числами; в пространстве придется положить в основу гиперкомплексные числовые системы.

Было бы очень интересно распространить эти рассуждения на многомерные пространства. Для дискретных групп совмещений многомерных шаров получены определенные результаты, так как для правильных многогранников известны аналоги в пространствах произвольного числа изме-

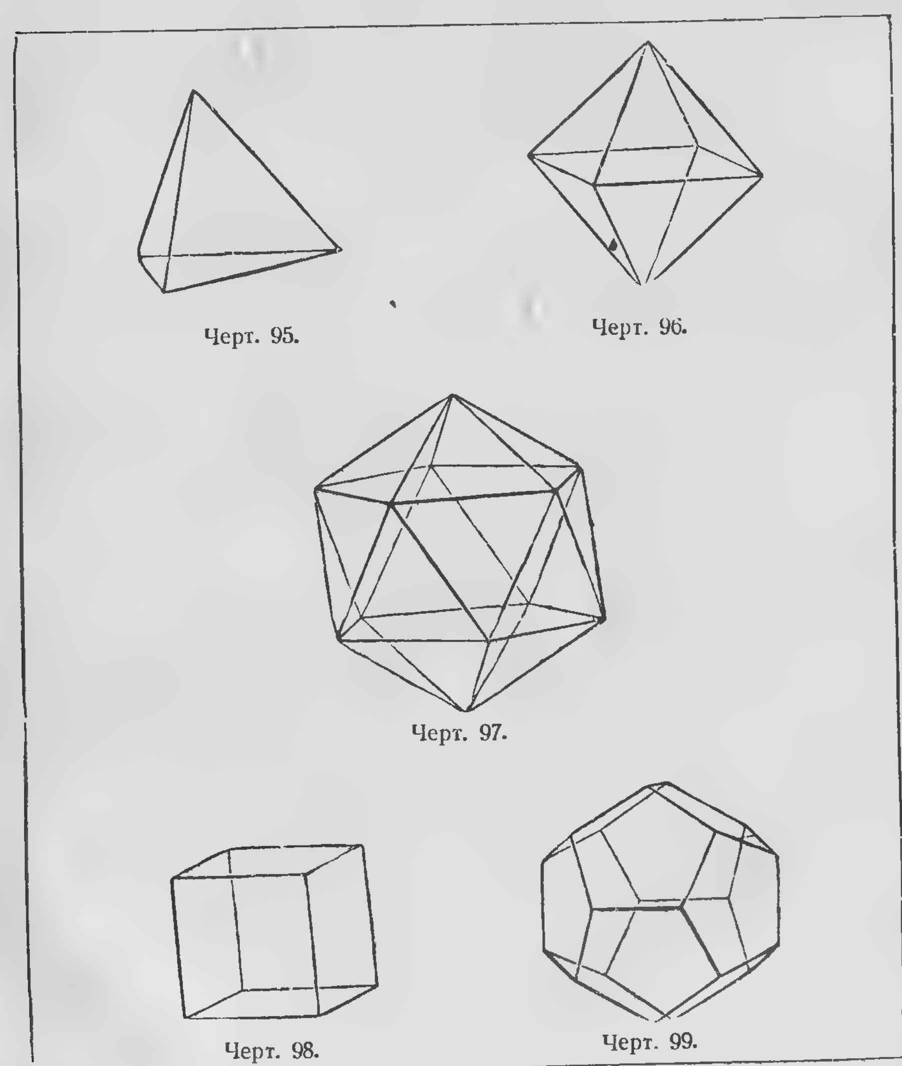
рений. Этими многомерными образами мы еще займемся в следующей главе. Далее, Бибербах доказал, что для всякого n существует только конечное число дискретных кристаллографических n-мерных групп и что всякая такая группа содержит n-линейно независимых переносов.

14. Правильные многогранники. Определение кристаллографических классов привело нас к правильным тетраэдру и октаэдру. Теперь мы дадим общее определение правильных многогранников и выясним, какие возможны правильные многогранники, кроме тетраэдра и октаэдра.

Мы предъявляем следующие требования к правильному многограннику: все его вершины, все его ребра и все его грани должны быть равноправны. Кроме того мы требуем, чтобы все грани представляли правильные многоугольники.

Подобный многогранник прежде всего не должен иметь входящих углов и ребер. В самом деле, так как все углы и все ребра не могут быть входящими, то существование входящих углов или ребер приводило бы к неравноправности вершин и ребер. Отсюда следует, что сумма углов многоугольников, сходящихся в вершине многогранника, должна быть меньше 2π, так как в противном случае все многоугольники расположились бы в одной плоскости или должны были бы образовать входящие ребра, исходящие из такой вершины. Далее, так как в каждой вершине должны сходиться по меньшей мере три многоугольника и так как из правильности многоугольников следует равенство всех углов многоугольников, то все эти углы должны быть меньше, чем $\frac{2\pi}{3}$. Но в правильном шестиугольнике каждый угол равен как раз $\frac{2\pi}{3}$ и с возрастанием n угол правильного n-угольника возрастает. Таким образом в качестве граней правильных многогранников нам следует рассматривать только треугольники, четырехугольники и пятиугольники. Так как правильный четырехугольник, т. е. квадрат, содержит только прямые углы, то в вершине правильного многогранника могут сходиться только три квадрата, в противном случае сумма углов достигла бы 2π; точно так же в вершине правильного многогранника не могут сходиться более чем три пятиугольника. Теперь мы можем полностью определить вид правильного многогранника, если будет известно число сходящихся в каждой вершине граней и число вершин многогранника. В соответствии с этим можно заключить, что возможен только один многогранник, ограниченный квадратами, и один, ограниченный правильными пятиугольниками. Однако в вершине правильного многогранника могут сходиться три, четыре или пять равносторонних треугольников, так как лишь шесть треугольников дают сумму углов, равную 2π. Следовательно, равносторонние треугольники могут служить гранями трех различных многогранников. Таким образом мы приходим всего к пяти возможностям для правильных многогранников. Все эти пять возможностей действительно осуществляются. Еще Платон знал все пять правильных многогранников и приписывал им большое значение в своем учении об идеях. Поэтому они называются также платоновыми телами. В приводимой ниже таблице сопоставлены важнейшие данные для всех пяти правильных многогранников, а на черт. 95—99 даны изображения этих многогранников в ортогональной проекции.

Название многогранника	Вид многоугольной грани	Число			
		вершин	ребер	граней	граней, сходящихся в каждой вершине
Тетраэдр (черт. 95)	Треугольник	4	6	4	3
Октаэдр (черт 96)	»	6	12	8	4
Икосаэдр (черт. 97)	»	12	30	20	5
Куб (гексаэдр) (черт. 98)	Квадрат	8	12	6	3
Додекаэдр (черт. 99)	Пятиугольник	20	30	12	3



Черт. 95.

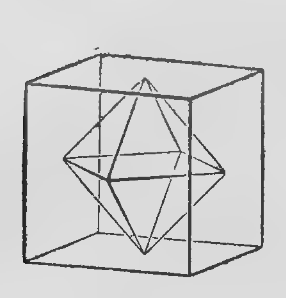
Черт. 96.

Черт. 97.

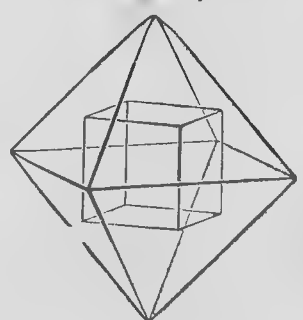
Черт. 98.

Черт. 99.

Все правильные многогранники находятся в таком же отношении к шару, какое мы указали в предыдущем параграфе для тетраэдра и октаэдра. Все они могут быть вписаны в шар и каждый из этих многогранников приводит к дискретной группе движений шара, так что вершины многогранника образуют систему эквивалентных точек. Если провести через все вершины многогранника касательные к шару плоскости, то эти плоскости должны образовать новый многогранник, который должен переходить в самого себя при движениях, содержащихся в группе. Ка́залось бы, что и новый многогранник также представляет правильный многогранник и при таком построении все пять многогранников должны попарно соответствовать друг другу. Если на самом деле осуществить такое построение для октаэдра, то действительно получается правильный многогранник, именно куб. На черт. 100 изображено взаимное расположение обоих этих многогранников. Таким образом мы могли бы определить группу



Черт. 100.



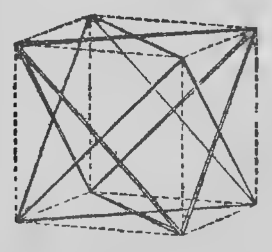
Черт. 101.

O шара при помощи куба так же, как мы определили эту группу при помощи октаэдра. Взаимную связь обоих тел можно усмотреть в таблице: число вершин одного тела равно числу граней другого; оба тела имеют одинаковое число ребер; в вершине одного тела сходится столько граней, сколько вершин приходится на грань другого тела. Поэтому можно также описать октаэдр вокруг куба (черт. 101).

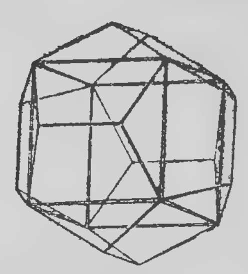
Как показывает наша таблица, аналогичные соотношения имеют место между додекаэдром и икосаэдром. Поэтому оба тела приводят к одной и той же группе шара, которую обычно называют группой икосаэдра. Исходя из кристаллографических соображений, мы не могли бы притти к этой группе, так как в ней играет роль число 5, между тем как в кристаллографических классах нет пятикратных осей. Для тетраэдра при таком построении мы не получаем другого правильного тела, но снова получаем тетраэдр.

В следующей главе мы познакомимся с принципом двойственности в пространстве, который даст нам более общий метод приведения в соответствие точек, прямых и плоскостей одной фигуры с плоскостями, прямыми и точками другой фигуры. По этому принципу двойственности куб соответствует октаэдру, икосаэдр — додекаэдру, а тетраэдр — самому себе. Более детальное рассмотрение показывает, что группа тетраэдра представляет подгруппу группы октаэдра. Подобно этому мы уже видели,

что среди дискретных групп движения плоскости одни группы представляют подгруппы других. Связь между группами T и O имеет то наглядное следствие, что в куб можно вписать правильный тетраэдр так, что



Черт. 102.



Черт. 103.

вершины тетраэдра будут являться вершинами куба, а ребра тетраэдра будут служить диагоналями граней куба. Таким образом можно вписать в куб два тетраэдра (черт. 102).

Совершенно таким же образом, как тетраэдр в куб, можно вложить куб в додекаэдр (черт. 103). Детальное исследование показывает, что можно вложить в каждый додекаэдр пять кубов; при этом на каждой грани додекаэдра лежит по одному ребру каждого куба и в каждой вершине сходятся по два куба.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА

КОНФИГУРАЦИИ

В этой главе мы познакомимся с такими геометрическими фактами, для формулировки и доказательства которых нам не придется ни измерять ни сравнивать никаких отрезков или углов. Казалось бы, что без измерения длин и углов нельзя определить вообще никаких существенных свойств какой-нибудь фигуры, а можно только высказывать неточные положения. И, в самом деле, в течение долгого времени в геометрии занимались только исследованием метрических соотношений. Только научное обоснование перспективы в живописи привело к вопросам такого рода, которыми мы будем заниматься ниже. Именно, если проектировать плоскую фигуру из некоторой точки на какую-нибудь другую плоскость, то длины и углы будут изменяться; при этом параллельные прямые могут даже превратиться в непараллельные. А между тем некоторые существенные свойства фигур должны сохраниться, иначе мы не воспринимали бы проекцию как правильное изображение.

Таким образом метод проекций привел к новой теории, которая вследствие такого происхождения была названа проективной геометрией. Начиная с XIX в., проективная геометрия занимает центральное место в геометрическом исследовании. Благодаря введению однородных координат удалось свести теоремы проективной геометрии к алгебраическим уравнениям, точно так же как декартовы координаты позволили свести к уравнениям метрические теоремы. Однако аналитическая проективная геометрия отличается от метрической гораздо большей симметрией и общностью; поэтому, если хотят, наоборот, истолковать геометрически более тонкие алгебраические соотношения, то обычно их преобразуют в однородную форму, выражая переменные через однородные координаты, так как метрическое выражение этих соотношений в декартовой системе координат было бы не наглядным. Более того, можно и метрику рассматривать как специальную часть проективной геометрии.

Элементарными образами проективной геометрии являются точки, прямые и плоскости. Элементарные высказывания проективной геометрии относятся к простейшим возможным соотношениям между этими тремя образами, а именно, к их взаимному расположению или *инцидентности*. Под инцидентностью понимают следующие соотношения: точка лежит на прямой, точка лежит на плоскости, прямая лежит на плоскости. Очевидно, могут быть три высказывания, эквивалентные этим, а именно: прямая проходит через точку, плоскость проходит через точку и плоскость проходит

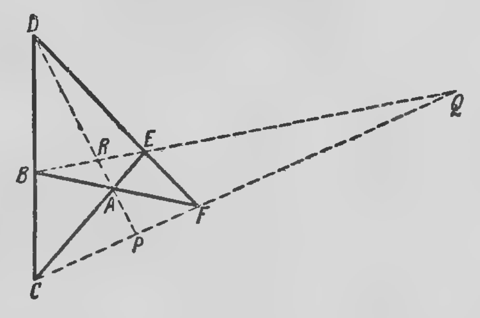
через прямую. И вот, для того чтобы придать симметрический вид этим трем парам высказываний, и было введено понятие инцидентности: прямая инцидентна с точкой, плоскость инцидентна с точкой, плоскость инцидентна с прямой.

Высказывания относительно инцидентности являются во многих отношениях важнейшими в проективной геометрии. Тем не менее в проективной геометрии применяются еще два других основных понятия, которые не могут быть выведены из понятия инцидентности. Так, следует различать два различных расположения четырех точек на одной и той же прямой; кроме того, необходимо ввести понятие непрерывности так, чтобы совокупность всех точек прямой была связана с совокупностью всех чисел. Этот перечень исчерпывает основные понятия проективной геометрии.

Мы рассмотрим особенно поучительную область проективной геометрии — конфигурации. Это откроет нам перспективы и в отношении других геометрических вопросов. Здесь можно еще упомянуть, что долгое время конфигурации рассматривались как важнейшая область всей геометрии[1]).

15. Предварительные замечания относительно плоских конфигураций. Плоская конфигурация представляет собой систему из p точек и g прямых, расположенных на плоскости таким образом, что всякая точка системы инцидентна с одним и тем же числом γ прямых этой системы и точно так же всякая прямая системы инцидентна с одним и тем же числом π точек системы. Подобная конфигурация обозначается символом $(p_\gamma g_\pi)$. Четыре числа p, g, π, γ не вполне произвольны. В самом деле, мы требуем, чтобы через все p точек проходило всего γp прямых системы. При этом каждая прямая считается π раз, так как она проходит через π точек. Таким образом число g прямых системы равно $\gamma p/\pi$. Мы видим, следовательно, что для всякой конфигурации должно иметь место соотношение:

$$p\gamma = g\pi.$$



Черт. 104.

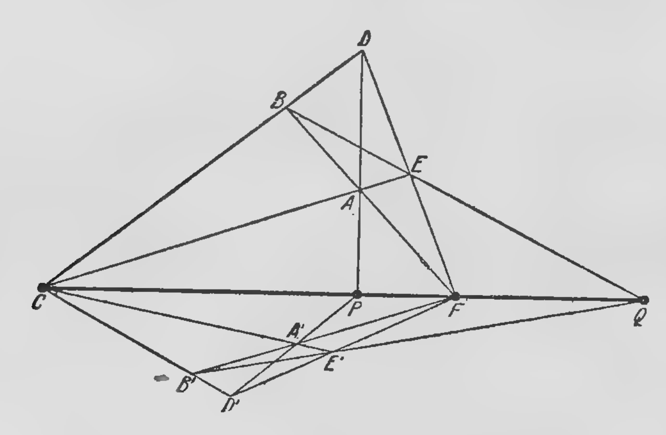
Точка и проходящая через нее прямая образуют простейшую конфигурацию, символ которой $(1_1\ 1_1)$. Следующей простой конфигурацией является треугольник $(3_2\ 3_2)$. Проведем теперь на плоскости четыре прямых так, чтобы среди них не было параллельных прямых и чтобы никакие три прямые не проходили через одну точку; мы получим шесть точек пересечения $ABCDEF$ (черт. 104). Известная фигура полного четырехсторонника, получающаяся таким образом, есть конфигурация $(6_2\ 4_3)$. Равенство $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$ подтверждает нашу общую формулу. В этой конфигурации в противоположность первым двум тривиаль-

---

1) Подробное изложение этого предмета можно найти в книге F. Levi, Geometrische Konfigurationen, Leipzig 1929.

ным случаям не все прямые, соединяющие точки конфигурации, являются в то же время прямыми конфигурации; точно так же, вообще говоря, не все точки пересечения прямых конфигурации непременно должны быть точками конфигурации.

Для того чтобы получить все прямые, соединяющие точки конфигурации (черт. 104), нам необходимо еще провести три диагонали AD, BE, CF. При этом мы получаем в качестве новых точек пересечения три вершины PQR диагонального треугольника. Можно было бы думать, что путем проведения дальнейших соединяющих прямых и получения дальнейших точек пересечения мы придем к некоторой конфигурации, у которой, так же как и у треугольника, все прямые, соединяющие две точки конфигурации, всегда являются прямыми конфигураций и все точки пересечения двух прямых конфигурации всегда являются точками



Черт. 105.

конфигурации. Однако можно доказать, что кроме треугольника таких конфигураций вообще не существует. Если мы будем в четырехстороннике проводить бесчисленные прямые, соединяющие его вершины, и добавлять появляющиеся при этом точки пересечения, то можно даже доказать, что в конце концов в любой окрестности любой точки плоскости будут расположены такие точки пересечения. Получающуюся при этом фигуру называют сетью Мебиуса. Эту сеть можно использовать для определения проективных координат.

Напомним значение четырехсторонника для построения гармонических точек, так как это нам далее пригодится. Четыре точки $CPFQ$ прямой называются гармоническими или, иначе, точка Q называется четвертой гармонической по отношению к точкам CPF, если можно построить такой четырехсторонник, в котором эти точки будут определяться такой же инцидентностью, как и на черт. 104. Основной теоремой проективной геометрии вследствие ее простоты является теорема, что ко всяким трем точкам прямой всегда можно найти одну и только одну четвертую гармоническую. Таким образом, если, как на черт. 105, точки CPF будут дополнены двумя различными способами до четырехсторонника,

го согласно этой теореме[1]) оба построения должны привести к одной и той же точке Q.

В дальнейшем мы рассмотрим главным образом те конфигурации, в которых встречается столько же точек, сколько прямых, т. е. такие конфигурации, для которых имеет место равенство $p=g$. Вследствие соотношения $p\gamma=\pi g$ в этом случае мы должны иметь также $\gamma=\pi$ так, что символическое обозначение конфигурации всегда имеет вид $(p_\gamma p_\gamma)$. Для такой конфигурации мы введем более краткое обозначение (p_γ). Далее мы будем всегда требовать (что представляется вполне естественным), чтобы конфигурация была связной и не распадалась на отдельные фигуры.

Случаи $\gamma=1$ и $\gamma=2$ не имеют большого значения. Для случая $\gamma=1$ мы имеем тривиальную конфигурацию, а именно точку и проходящую через нее прямую. В самом деле, если бы в такой конфигурации было несколько точек, то она должна была бы распасться, так как никакая прямая конфигурации не может содержать более одной точки. Случай $\gamma=2$ осуществляется в плоских замкнутых многоугольниках; а так как в конфигурации (p_2) через всякую точку проходят две прямые и на каждой прямой должны лежать две точки, то легко убедиться, что всякая конфигурация (p_2) непременно должна состоять из вершин и сторон p-угольника.

Случай $\gamma=3$, напротив, приводит ко многим интересным конфигурациям. В этом случае число p точек (и прямых) по меньшей мере должно равняться 7. В самом деле, через каждую точку конфигурации проходят три прямые и на каждой из них должны лежать еще две другие точки конфигурации. В дальнейшем мы рассмотрим подробно только случаи $7\leqslant p\leqslant 10$.

16. Конфигурации (7_3) и (8_3). Чтобы получить конфигурацию (p_γ), проще всего итти следующим путем: занумеруем p точек числами от 1 до p и точно так же занумеруем p прямых цифрами от (1) до (p). Затем построим прямоугольную схему из $p\gamma$ точек так, чтобы в каждом столбце находилось друг под другом γ точек, лежащих на одной прямой; таким образом мы получим p столбцов, соответствующих p прямым.

Следовательно, мы получим для конфигурации (7_3) такую схему:

$$\overbrace{\begin{array}{ccccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)&(6)&(7)\end{array}}^{p}$$
$$\gamma\left\{\begin{array}{ccccccc}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{array}\right.$$

При заполнении этой схемы необходимо удовлетворить следующим трем требованиям: во-первых, каждый столбец должен содержать только различные цифры, так как в противном случае на прямой лежало бы меньше трех точек; во-вторых, два столбца не могут содержать две одинаковых цифры, так как в противном случае соответствующие прямые должны были бы совпасть; наконец, в-третьих, всякая цифра должна встречаться в схеме всего три раза, так как через каждую точку должны

[1]) Это предложение непосредственно следует из рассмотренной в § 19 теоремы Дезарга.

проходить три прямые. Эти три условия во всяком случае необходимы для того, чтобы схема была геометрически реализуемой. Напротив, эти требования недостаточны, как это мы увидим на примерах. Для осуществления схемы необходимы еще геометрические или алгебраические исследования, которые не могут быть так просто сведены к арифметике. Но вообще, если схема представляет некоторую конфигурацию, то мы можем произвести некоторые изменения в схеме так, что это не повлияет на конфигурацию. Так, мы можем в каждом столбце изменить вертикальный порядок цифр, можем изменить порядок расположения столбцов, что равносильно простой перенумерации прямых, и наконец мы можем также произвольным образом перенумеровать и точки. Так как все эти изменения не влияют на конфигурацию, то мы будем рассматривать все схемы, отличающиеся только подобными изменениями, как тождественные.

С этой точки зрения, однако, можно установить только одну схему для конфигурации (7_3). Точки, лежащие на первой прямой, мы обозначим номерами 1, 2, 3. Через точку 1 проходят еще две другие прямые, которые не должны содержать точек 2 и 3. Обозначим точки, лежащие на второй прямой, цифрами 4 и 5, а точки, лежащие на третьей прямой,— цифрами 6 и 7. Таким образом мы перенумеровали все точки, и схема получается такая:

1	1	1	.	.	.	.
2	4	6	.	.	.	.
3	5	7	.	.	.	.

В следующих столбцах цифры 2 и 3 должны встретиться еще по два раза, причем они должны стоять в различных столбцах; поэтому мы выпишем их в верхнем ряду:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	.	.	.	.
3	5	7	.	.	.	.

Для того чтобы заполнить остающиеся свободными восемь мест, нам нужно использовать еще числа 4, 5, 6, 7, так как цифры 1, 2 и 3 уже использованы. Цифра 4 должна встретиться еще два раза. Так как она не должна стоять оба раза под одной и той же цифрой, то мы можем выписать ее в таких местах:

2	2	3	3
4	.	4	.
.	.	.	.

Всякое другое возможное расположение несущественно отличается от этого. Точно так же цифра 5 должна встретиться еще два раза и не должна больше стоять под четверкой. Таким образом мы можем написать:

2	2	3	3
4	5	4	5
.	.	.	.

На первых двух из остающихся четырех свободных мест должны стоять цифры 6 и 7, так как все другие цифры уже использованы, и под одной

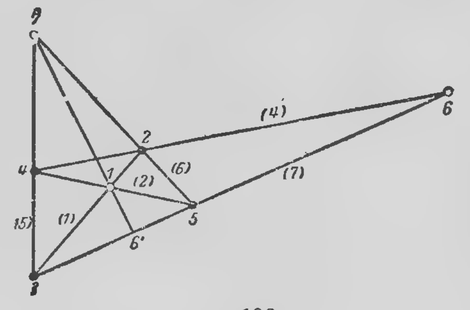
и той же цифрой 2 не могут два раза стоять одинаковые цифры. Так как перемена местами цифр 6 и 7 не внесла бы существенных изменений, то мы можем написать:

4	5	4	5
6	7	.	.

Теперь оставшиеся два места могут быть заполнены только цифрами 7 и 6, так что мы для конфигурации (7_3) действительно получаем единственную возможную схему:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

Мы уже упоминали, что из существования подобной схемы еще не следует, что на самом деле существует конфигурация (7_3). Как раз в нашем случае можно доказать невозможность конфигурации. Именно, если мы захотим написать уравнения прямых нашей схемы по способу аналитической геометрии, то мы придем к системе уравнений, содержащей внутреннее противоречие. Невозможность этой конфигурации можно обнаружить и наглядно. Начертим прежде всего (черт. 106) прямые (1) и (2) нашей схемы, занумеруем точку их пересечения цифрой 1, как этого требует наша схема, и возьмем на прямой (1) точки 2 и 3, а на прямой (2) — точки 4 и 5 произвольно. Затем проведем прямые (4) и (7), которые определяются парами точек 2 4 и 3 5; обозначим точку их пересечения цифрой 6. Точно так же пары точек 2 5 и 3 4 определяют прямые (5) и (6) и точку их пересечения 7. Таким образом мы определили все точки конфигурации. Однако обнаруживается, что три точки — 1, 6, 7, — которые должны лежать на недостающей еще прямой (3), не лежат на одной прямой, так что мы получаем в пересечении прямых (1 7) и (7) еще одну лишнюю точку 6'. Можно было бы думать, что это зависит от неудачного выбора точек 2, 3, 4, 5. Однако мы в нашей фигуре узнаем гармоническое построение (черт. 104). Таким образом точка 6' есть четвертая гармоническая к трем точкам 3, 5, 6, а потому согласно элементарной теореме проективной геометрии она не может совпасть ни с одной из этих точек.



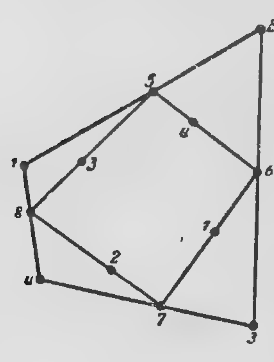
Черт. 106.

Перейдем теперь к конфигурации (8_3). Таким же путем, как и выше, можно показать, что и здесь по существу имеется только одна схема:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1	2	2	3	3	4
2	4	6	3	7	4	5	5
5	8	7	6	8	7	8	6

Эту конфигурацию можно выразить через два четырехугольника 1 2 3 4 и 5 6 7 8, которые одновременно и вписаны и описаны друг около друга (черт. 107). Именно, на прямой (1 2) лежит точка 5, на прямой (2 3) — точка 6, на прямой (3 4) — точка 7 и на прямой (4 1) — точка 8; точно так же стороны (5 6), (6 7), (7 8), (8 5) инцидентны с точками 4, 1, 2, 3. Здесь также можно убедиться, что такую конфигурацию нельзя начертить. Аналитическое исследование схемы приводит к системе уравнений, которая, правда, не содержит противоречия, как уравнения конфигурации (7_3), но решение которой всегда возможно только в комплексной форме.

Тем не менее эта конфигурация представляет геометрический интерес, так как она играет важную роль в теории плоских кривых третьего порядка, не имеющих двойных точек. Эти кривые имеют девять точек перегиба, из которых, однако, действительными могут быть не более трех. При этом можно доказать алгебраически, что всякая прямая, соединяющая две из точек перегиба, должна проходить и через третью точку перегиба. Напротив, четыре точки перегиба не могут лежать на одной прямой, так как кривая третьего порядка может пересекаться с прямой не более чем в трех точках. Оказывается, что прямые, проходящие через точки перегиба, образуют конфигурацию, причем $p=9, \pi=3$. Далее, $\gamma=4$; в самом деле, если исключить одну точку перегиба, то восемь остальных должны попарно лежать на одной прямой, так что действительно через всякую точку проходят четыре прямые.



Черт. 107.

Из нашей формулы $g=\frac{p\gamma}{\pi}$ мы получаем для g значение 12. Следовательно, конфигурация будет типа $(9_4\ 12_3)$. Если мы будем составлять схему подобной конфигурации, то получим, не считая несущественных изменений, только одну возможность:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	1	1	2	2	3	3	4	1	2	5	6
2	4	6	3	7	4	5	5	3	4	7	8
5	8	7	6	8	7	8	6	9	9	9	9

Если исключить из этой конфигурации точку 9 и проходящие через нее прямые (9), (10), (11), (12), то останется как раз наша схема (8_3). Точно так же мы придем к конфигурации (8_3), если исключим любую другую из девяти точек и четыре проходящие через нее прямые, ибо все точки конфигурации $(9_4\ 12_3)$ равноправны.

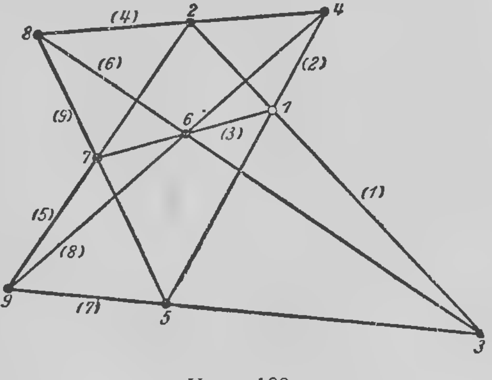
17. Конфигурации (9_3). В то время как в случаях $p=7$ и $p=8$ мы получали только по одной схеме конфигурации, причем осуществление этих схем оказывалось невозможным, в случае $p=9$ мы можем установить три существенно различных схемы, причем все три можно осуществить с помощью действительных точек и прямых.

Во многих отношениях важнейшей из этих конфигураций и вообще важнейшей конфигурацией в геометрии является та, которая называется конфигурацией Брианшона-Паскаля. Ради краткости мы введем для обозначения этой конфигурации символ $(9_3)_1$, а для двух других конфигураций (9_3) введем обозначение $(9_3)_2$ и $(9_3)_3$.

Схему конфигурации $(9_3)_1$ можно записать следующим образом:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	7	6	5	6	7
3	5	7	8	9	8	9	9	8

Для того чтобы начертить такую конфигурацию, выберем сначала произвольно точки 8 и 9 (черт. 108) и проведем произвольным образом прямые (4), (6), (9) через точку 8 и прямые (5), (7), (8) через точку 9. Из девяти точек пересечения, получающихся при этом, шесть принадлежат к конфигурации; обозначим их соответственно схеме цифрами 2, 3, 4, 5, 6, 7. Через эти точки проводим недостающие прямые (1), (2), (3). Сначала проводим прямые (1) через точки 2, 3 и (2) через точки 4, 5. Точку пересечения этих прямых нам следует обозначить цифрой 1. Недостающая еще прямая (3) определяется точками 6, 7. Наша схема требует, чтобы эта прямая проходила через точку 1. Мы, в самом деле, убеждаемся, что эта инцидентность выполняется сама собой, несмотря на вполне произвольный выбор точек 8 и 9 и обоих троек прямых, проходящих через эти точки.



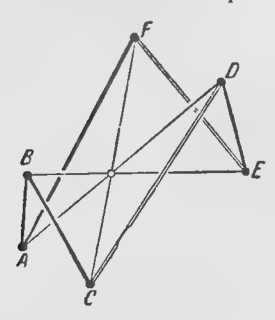
Черт. 108.

Геометрическое основание этого поразительного явления выясняется теоремами Брианшона, к изложению которых мы и переходим.

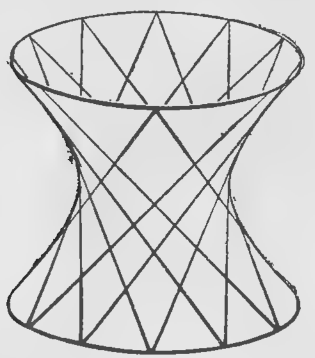
Мы будем исходить из однополостного гиперболоида. Как мы уже видели в первой главе, на этом гиперболоиде лежат два семейства прямых и притом так, что всякая прямая одного семейства пересекает всякую прямую другого, между тем как две прямые одного и того же семейства никогда не пересекаются. Возьмем теперь две прямые одного и того же семейства (черт. 109) (они начерчены двойными линиями) и три прямых другого семейства (они начерчены жирными линиями) и образуем из этих прямых пространственный шестиугольник $ABCDEFA$. Чтобы получить эту фигуру, мы сначала будем двигаться по прямой первого семейства из точки A в точку B. Через точку B проходит определенная прямая второго семейства, по которой мы будем двигаться до некоторой точки C. В этой точке C мы перейдем на проходящую через нее прямую первого семейства, двигаясь по которой придем в точку D; из этой точки мы опять будем двигаться на прямой второго семейства до точки E и наконец,

двигаясь по прямой первого семейства, придем к точке F этой прямой, в которой она пересекается с прямой второго семейства, проходящей через точку A. Таким образом стороны шестиугольника принадлежат попеременно то одному, то другому семейству прямых.

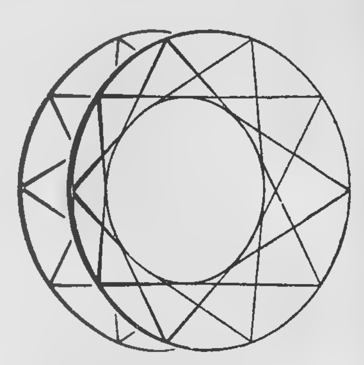
Докажем теперь, что диагонали AD, BE и CF этого шестиугольника пересекаются в одной точке. Рассмотрим прежде всего диагонали AD и BE. Так как стороны шестиугольника AB и DE принадлежат к различным семействам прямых поверхности, то они пересекаются друг с другом. Поэтому четыре точки A, B, D, E лежат в одной плоскости, а отсюда следует, что и диагонали AD и BE пересекаются друг с другом. Точно так же можно доказать, что и две другие пары диагоналей пересекаются. Но если три прямых попарно пересекаются друг с другом, то они либо лежат в одной плоскости, либо же, если они не лежат в одной плоскости, проходят через одну и ту же точку. Но если бы три диагонали нашего шестиугольника $ABCDEF$ лежали в одной плоскости, то и сам шестиугольник должен был бы лежать в этой плоскости и тогда его стороны должны были бы попарно пересекаться. Но это невозможно, так как, например, прямые AB и CD принадлежат к одному и тому же семейству, а потому не могут пересекаться. Таким образом и в самом деле эти три диагонали должны проходить через одну и ту же точку.



Черт. 109.



Черт. 110.



Черт. 111.

Эта теорема пространственной геометрии приводит к теоремам Брианшона плоской геометрии. Рассмотрим однополостный гиперболоид из некоторой точки P, относительно которой предполагаем, что она не лежит на этой поверхности. Тогда контур гиперболоида имеет вид конического сечения, и это коническое сечение может быть гиперболой (черт. 110) или эллипсом (черт. 111). При этом получается, что область с одной стороны контура оказывается непокрытой изображением, между тем как другая сторона окажется покрытой дважды. Оба листка изображения соединяются вдоль конического сечения, представляющего контур фигуры.

Прямые, лежащие на поверхности, при таком изображении кажутся частично закрытыми, частично незакрытыми, и таким образом они переходят с одного листка на другой, а потому должны пересекать контур. С другой стороны, они не могут пересекать этой кривой, так как одна сторона ее остается непокрытой. Поэтому эти прямые должны казаться касательными к контуру. Таким образом наш пространственный шестиугольник превращается в плоский шестиугольник, стороны которого касаются конического сечения; это позволяет нам вывести следующую теорему плоской геометрии:

Диагонали шестиугольника, описанного вокруг конического сечения, пересекаются в одной точке.

Однако мы доказали нашу теорему только для таких конических сечений, которые могут служить контурами некоторого однополостного гиперболоида, т. е. прежде всего для определенных гипербол и эллипсов. Но коническое сечение, представляющее контур, может быть также и параболой. В самом деле, проектирующие лучи, дающие контур, образуют конус, касающийся поверхности, с вершиной в точке P, т. е. конус второго порядка; поэтому, если мы расположим плоскость проекции так, что она будет параллельна образующей этого конуса, то проекция поверхности на эту плоскость будет иметь контуром параболу, ибо ведь контур представляет собой кривую пересечения плоскости проекций с конусом. А в этом случае кривая будет параболой (стр. 16, 19, 40).

Теперь поместим центр проекции P на самой поверхности. Тогда обе прямые поверхности, проходящие через точку P, представляются как две точки; все остальные прямые поверхности останутся прямыми. Так как всякая прямая одного семейства пересекает прямую другого семейства, проходящую через центр проекции, то все это семейство прямых представится нам в виде сходящегося пучка лучей, вершиной которого будет служить прямая g другого пучка, проходящая через точку P. Таким же образом нам представится и другое семейство в виде сходящегося пучка лучей. Вершина второго пучка будет отлична от вершины первого, так как этой вершиной будет служить изображение прямой, проходящей через точку P, отличной от g. Отсюда мы можем вывести, пользуясь теоремой о пространственном шестиугольнике, такое следствие:

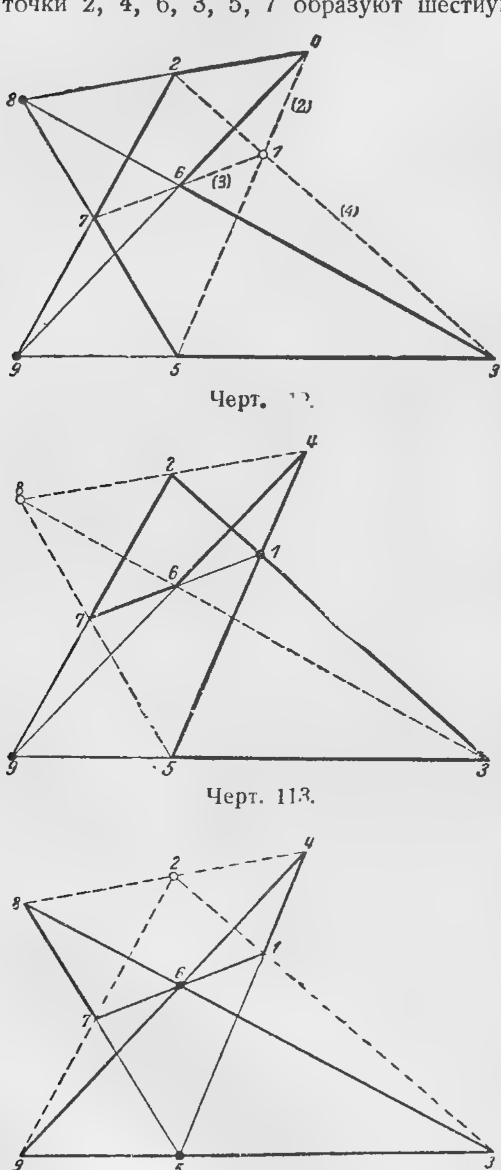
Диагонали плоского шестиугольника, стороны которого попеременно проходят через две определенных точки, пересекаются в одной точке.

Эти теоремы относительно шестиугольников, касающихся одного из трех типов конических сечений или относительно конического сечения, вырождающегося в пару точек, называются теоремами Брианшона, по имени открывшего их ученого. Точка, в которой пересекаются эти три диагонали, называется точкой Брианшона.

Все же при помощи наших пространственных построений мы еще не полностью доказали теоремы Брианшона. Можно было бы предполагать, что не всякий шестиугольник Брианшона может быть получен путем проекции одного из рассмотренных нами пространственных шестиугольников. Однако можно доказать, что действительно всякий плоский шестиугольник, удовлетворяющий условиям одной из теорем Брианшона, может быть дополнен до пространственной фигуры, которую мы рассмотрели.

Последняя теорема Брианшона тесно связана с конфигурацией $(9_3)_1$

и объясняет, почему при построении этой конфигурации последняя инцидентность всегда сама собой выполняется. Именно, на черт. 108 и 112 точки 2, 4, 6, 3, 5, 7 образуют шестиугольник, стороны которого попеременно проходят через точки 8 и 9, а прямые (1), (2), (3) представляют диагонали 23, 45, 67 этого шестиугольника. Поэтому прямая (3) должна проходить через точку пересечения 1 прямых (1) и (2) и точка 1 есть точка Брианшона этого шестиугольника.



Черт. 112.

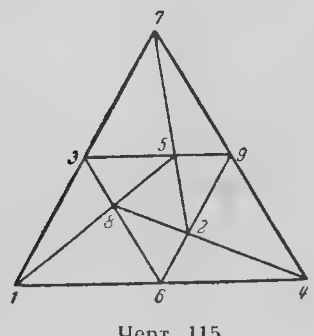
Черт. 113.

Черт. 114.

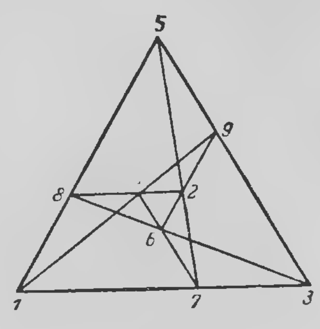
При нашем построении точки конфигурации $(9_3)_1$ имеют различное значение: точки 2, 4, 6, 3, 5, 7 образуют шестиугольник, точки 8 и 9 являются двумя точками, через которые проходят стороны шестиугольника, а точка 1 есть точка Брианшона. Однако такая ассимметрия зависит не от существа самой конфигурации, а от нашего выбора. Именно, мы можем также рассматривать одну из точек 8 или 9 как точку Брианшона; нам достаточно будет показать это на точке 8 (черт. 113), так как мы уже убедились на черт. 112, что точки 8 и 9 равноправны. Точно так же мы можем принять за точку Брианшона каждую из точек 2, 4, 6, 3, 5, 7; вследствие равноправности всех этих точек достаточно будет показать это на одной только точке 2 (черт. 114).

Вследствие такой внутренней симметрии конфигурация $(9_3)_1$ называется *правильной* конфигурацией. К понятию правильности конфигурации мы приходим, так же как и в случае точечных систем и многогранников, при изучении определенных отображений конфигурации на самое себя, которые называются автоморфизмами и играют такую же роль, как совмещения для точечных систем и многогранников. Автоморфизм конфигурации получается в том

случае, если можно так обменивать местами все точки конфигурации между собой и все ее прямые между собой, что при этом ни одна инцидентность не пропадает и не появляется ни одной новой инцидентности. Легко убедиться, что автоморфизмы образуют группу. Правильной называется такая конфигурация, для которой эта группа транзитивна, т. е.



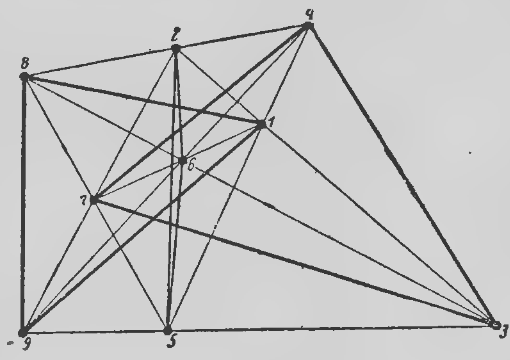
Черт. 115.



Черт. 116.

содержит столько отображений, что любая точка конфигурации может быть переведена посредством автоморфизма в любую другую точку этой конфигурации.

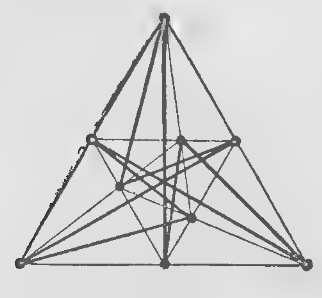
Для изучения автоморфизмов достаточно обратиться к абстрактной схеме конфигурации. Можно показать, что схемы конфигураций (7_3) и (8_3) правильны в этом смысле, точно так же как схема конфигурации $(9_4 12_3)$ (стр. 96).



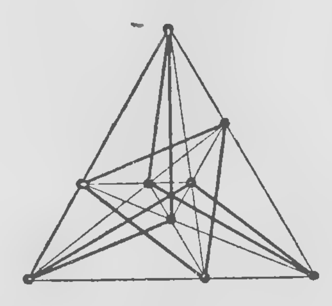
Черт. 117.

Обратимся теперь к двум другим конфигурациям (9_3). Они изображены на черт. 115 и 116. Чтобы уяснить, чем отличаются эти три конфигурации, мы можем поступить следующим образом: так как во всякой конфигурации (p_3) каждая точка соединена прямыми с шестью другими точками конфигурации, то в случае $p=9$ для каждой точки конфигурации должны оставаться две точки, не соединенные с этой точкой. Так, в конфигурации $(9_3)_1$ точки 8 и 9 не связаны с точкой 1. А так как точки 8 и 9 также не связаны и друг с другом, то точки 1, 8 и 9 образуют треугольник несвязанных точек. Такие же треугольники образуют точки 2, 5, 6 и 3, 4, 7 (черт. 117). Если мы теперь применим такой же способ к конфигурациям $(9_3)_2$ и $(9_3)_3$ и добавим к многоугольникам отрезки между оставшимися несвязанными точками, то мы получим для конфигурации $(9_3)_2$ девятиугольник (черт. 118) и для $(9_3)_3$ один шестиугольник и один треугольник (черт. 119). Отсюда прежде

всего следует, что три чертежа (черт. 108, 115 и 116) действительно изображают различные конфигурации, которые отличаются одна от другой не только одним расположением точек. Далее, можно отсюда вывести, что конфигурация $(9_3)_3$ заведомо неправильна. В самом деле, при посредстве автоморфизма мы можем перевести, очевидно, точку шестиугольника только в точку шестиугольника же, но никак ни в точку треугольника. Напротив, правильное расположение несвязанных точек в



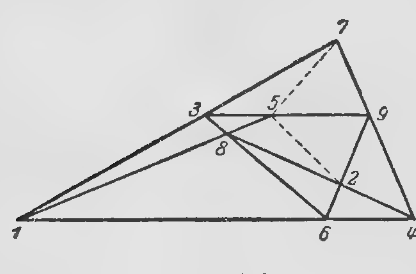
Черт. 118.



Черт. 119.

конфигурации $(9_3)_2$ заставляет думать, что эта конфигурация правильна; более детальное исследование схемы подтверждает это.

Если мы попытаемся построить шаг за шагом подобно конфигурации $(9_3)_1$ и обе другие конфигурации, то обнаруживается, что в этих случаях последняя инцидентность не выполняется сама собой, но выполняется только в том случае, если уже в предыдущих шагах мы встречаем расположения специального вида. В этом лежит причина того, что конфигурации $(9_3)_2$ и $(9_3)_3$ не имеют такого принципиального значения, как конфигурация $(9_3)_1$. Эти конфигурации не выражают никакой общей проективно-геометрической теоремы. Черт. 120 дает пример такого случая, когда последняя прямая конфигурации $(9_3)_2$ не может быть начерчена.

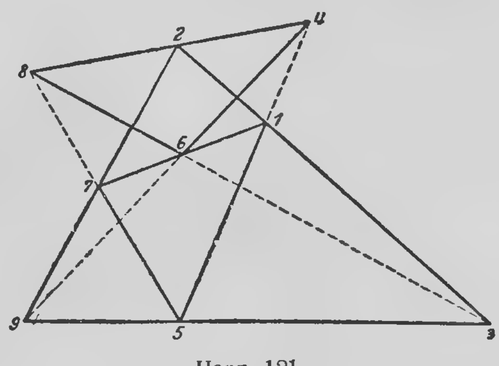


Черт. 120.

Однако вспомогательные операции, необходимые при построении конфигурации $(9_3)_3$, отличаются одной особенностью. Именно, они могут быть выполнены при помощи одной только линейки, так что конфигурации $(9_3)_1$ и $(9_3)_3$ могут быть построены при помощи одной линейки [1]). Аналитически это следует из того, что все элементы конфигурации могут быть определены путем последовательного решения линейных уравнений, коэфициенты которых представляют рациональные выражения от вычисленных ранее определяющих величин. Правда, уравнения прямых линий всегда линейны. Но для того чтобы получить систему уравнений конфи-

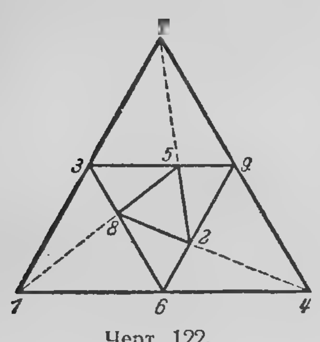
[1]) Чтобы построить $(9_3)_2$, нужно определить точки пересечения прямой с кривой второго порядка. Это построение нельзя выполнить с помощью одной линейки.

гурации, необходимо вычислить некоторые коэфициенты путем исключения их из других уравнений, так как некоторые прямые конфигурации вполне определяются прямыми, построенными раньше. Вообще говоря, такое исключение приводит к уравнениям более высокой степени. Это должно иметь место, например, для конфигурации (8_3), так как в противном случае мы бы не встретились здесь с комплексными элементами. Напротив, в конфигурациях (9_3) все вспомогательные уравнения линейны, а отсюда следует, что все эти три конфигурации всегда могут быть осуществлены в действительности при помощи одной линейки.

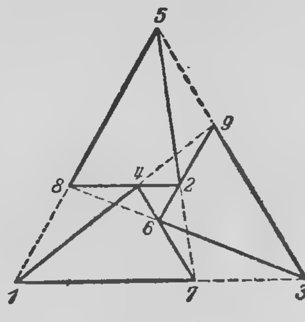


Черт. 121.

Мы можем мыслить элементы конфигураций (9_3) расположенными различным образом. Так, можно представить их во всех трех случаях в виде трех треугольников, из которых первый вписан во второй, второй — в третий и третий — в первый. Такую систему треугольников представляют, например, треугольники 157, 239 и 468 на черт. 121, 258, 369 и 147 на черт. 122 и 147, 258 и 369 на черт. 123. Подобным же образом мы представляли конфигурацию (8_3) как систему двух взаимно описанных четырехугольников (черт. 107, стр. 96).



Черт. 122.



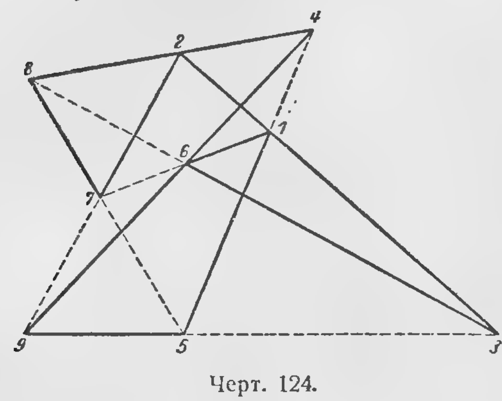
Черт. 123.

Далее, все конфигурации (9_3) можно представить в виде девятиугольников, вписанных и описанных вокруг самих себя.

Такими девятиугольниками являются 2361594872 на черт. 124, 1627384951 на черт. 125 и 1473695281 на черт. 126. При помощи соответствующих автоморфизмов можно найти в конфигурации $(9_3)_1$ еще несколько других девятиугольников, обладающих таким же свойством.

Построение p-угольников, одновременно вписанных и описанных вокруг самих себя, всегда должно приводить к конфигурациям (p_3). В самом деле, на каждой стороне многоугольника помимо двух вершин,

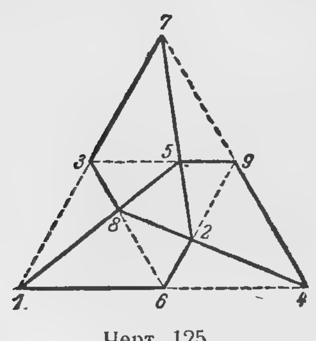
которые она соединяет, лежит еще одна вершина многоугольника, и точно так же каждая вершина должна лежать на трех сторонах многоугольника. При этом мы предполагаем только, что все стороны и вершины многоугольника равноправны. В противном случае на одной стороне многоугольника могли бы лежать две или более других вершины, а с другой стороны были бы другие стороны многоугольника, на которых не лежала бы ни одна дополнительная вершина.



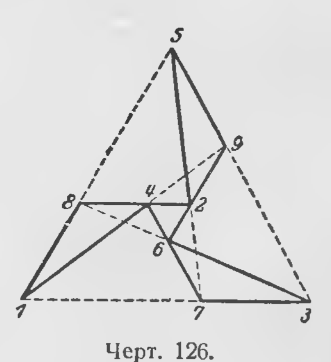
Черт. 124.

Конфигурации (7_3) и (8_3) также могут быть представлены как p-угольники подобного рода. В обозначениях наших схем будут одновременно описанными и вписанными в самих себя семиугольник 12457361 и восьмиугольник 126534871.

Для того чтобы ознакомиться с другим важным свойством конфигураций, нам нужно будет заняться принципом двойственности. Этот принцип придает проективной геометрии особую наглядность и симметрию. Его можно вывести наглядно из метода проектирования, который мы уже применяли для вывода теорем Брианшона.




Черт. 125.



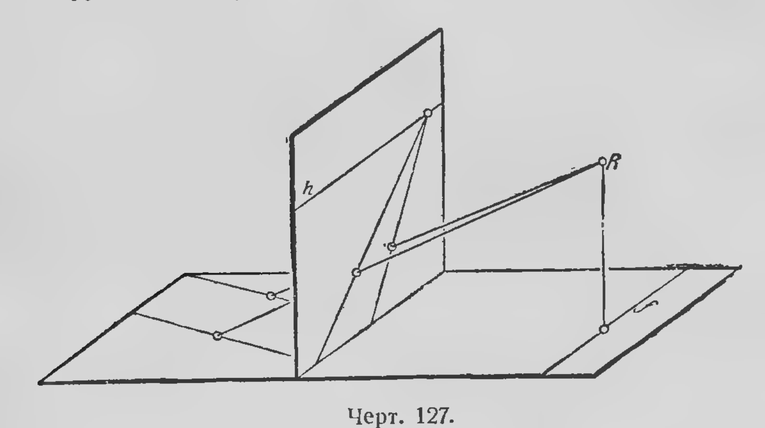
Черт. 126.

18. Перспектива, бесконечно удаленные элементы и принцип двойственности на плоскости. Когда мы рисуем на вертикальной доске изображение какого-нибудь плоского ландшафта, то изображение плоскости получается в таком виде: изображение ограничено прямой h, горизонтом, и две параллельные прямые этой плоскости, которые не параллельны сторонам доски, изображаются в виде двух прямых, пересекающихся на линии горизонта (черт. 127). Точка пересечения этих прямых называется в теории перспективы точкой схода.

Таким образом при изображении при помощи центральной перспективы параллельные линии обычно изображаются непараллельными. Далее можно убедиться, что такое изображение не взаимно однозначно. Точки гори-

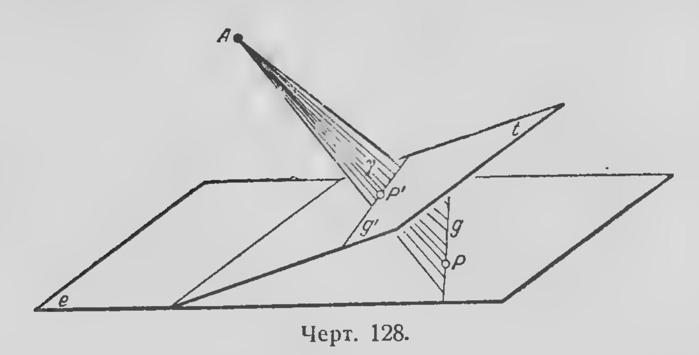
зонта на изображении не представляют никаких точек изображаемой плоскости, и наоборот, на этой плоскости имеются такие точки, которые не получаются на изображении. Это — точки прямой f, параллельной доске и проходящей в изображаемой плоскости через основание перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из точки наблюдения.

Такое явление может быть описано проще, если перейти от точек к проектирующим их лучам. Каждой точке P плоскости e (черт. 128)



Черт. 127.

соответствует прямая $AP = p$, соединяющая эту точку с точкой наблюдения A. Изображение точки P на какой-либо доске t есть точка P', в которой прямая p пересекается с доской; таким образом положение прямой p определяет изображение. Если точка P описывает в плоскости e



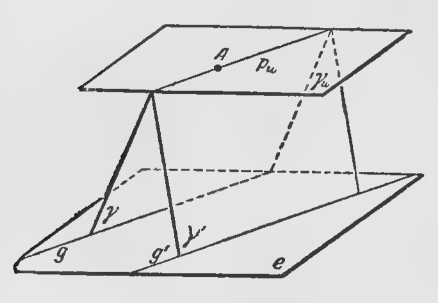
Черт. 128.

кривую, то прямая p описывает конус с вершиной в точке A. Изображение кривой на плоскости t представляет сечение конуса этой плоскостью. В частности, если точка P описывает в плоскости e прямую g, то конус превращается в плоскость γ, проходящую через точку A и прямую g. Таким образом, в то время как точкам плоскости e соответствуют прямые, проходящие через точку A, прямые плоскости e приводят к плоскостям, проходящим через точку A. Изображение прямой g на плоскости t представляет пересечение плоскостей t и γ, т. е. опять-таки

некоторую прямую g'. В этом состоит важнейшее свойство центральной перспективы, именно то, что прямые всегда изображаются в виде прямых.

Мы разбили перспективное отображение на два отображения, из которых второе можно рассматривать как обращение первого. Сначала точки (P) и прямые (g) некоторой плоскости заменились прямыми (p) и плоскостями (γ), проходящими через точку A, а затем прямые и плоскости, проходящие через точку A, снова заменялись точками (P') и прямыми (g') другой плоскости. Поэтому из соображений симметрии достаточно будет рассмотреть только первый шаг.

Это отображение $e \to A$ полностью определено только в заданном направлении, но не в направлении, обратном $A \to e$. Среди прямых, проходящих через точку A, прямые, параллельные плоскости e, при отображении занимают особое положение. Они не соответствуют никаким точкам плоскости e, в то время как остальные прямые, проходящие через точку A, определяют точку плоскости e, именно ту точку, в которой они пересекают эту плоскость. Прямые p_u, параллельные плоскости e, проходящие через точку A, заполняют некоторую плоскость γ_u, именно плоскость, проходящую через точку A и параллельную плоскости e (черт. 129). Эта плоскость γ_u опять-таки занимает особое положение среди всех плоскостей, проходящих через точку A при отображении $A \to e$. Именно, в то время как все другие проходящие через точку A плоскости соответствуют определенной прямой g на плоскости e, прямой пересечения их с плоскостью e, плоскость γ_u не соответствует никакой прямой, так как она не пересекает плоскости e.



Черт. 129.

Весьма целесообразно устранить эти исключительные случаи путем введения новых понятий, присоединяя к плоскости e точки P_u в качестве «бесконечно удаленных». Эти точки определяются тем, что они должны служить изображениями лучей p_u при отображении $A \to e$. Совокупность их следует рассматривать как изображение плоскости γ_u. Если мы таким образом избавимся от исключительного положения этой плоскости по сравнению с другими плоскостями, проходящими через точку A, то нам придется считать изображение этой плоскости прямой линией. Поэтому мы говорим, что бесконечно удаленные точки плоскости e заполняют некоторую прямую g_u, называемую бесконечно удаленной прямой плоскости e [1]). После того как мы дополнили таким образом плоскость e, очевидно, отображение точек и прямых плоскости e на прямые и плоскости, проходящие через точку A, полностью определено и притом взаимнооднозначно.

Целесообразность введения таких определений выясняется при рассмотрении отображения плоскости e посредством центральной перспективы

---

[1]) Название «бесконечно удаленная» объясняется тем, что луч зрения, направленный в некоторую точку плоскости e, всегда стремится к некоторому лучу p_u, если точка плоскости e бесконечно удаляется в определенном направлении.

на произвольную другую плоскость t. Так же как плоскость e мы дополнили бесконечно удаленными точками, так плоскость t дополним бесконечно удаленными точками, образующими бесконечно удаленную прямую этой плоскости. Но если плоскость t не параллельна плоскости e, то при изображении $A \to t$ бесконечно удаленным прямым l_u плоскости t соответствует не плоскость γ_u, но некоторая иная плоскость λ, проходящая через точку A. Плоскость λ пересекается с плоскостью e вдоль некоторой прямой l. Таким образом, при перспективном отображении $e \to t$ точкам бесконечно удаленной прямой одной плоскости соответствуют точки обыкновенной прямой другой плоскости. Только после введения бесконечно удаленных точек центральная перспектива превращается в такое отображение, при котором точки и прямые одной плоскости изображаются взаимнооднозначно точками и прямыми другой плоскости, причем бесконечно удаленные точки становятся равноправными с конечными точками.

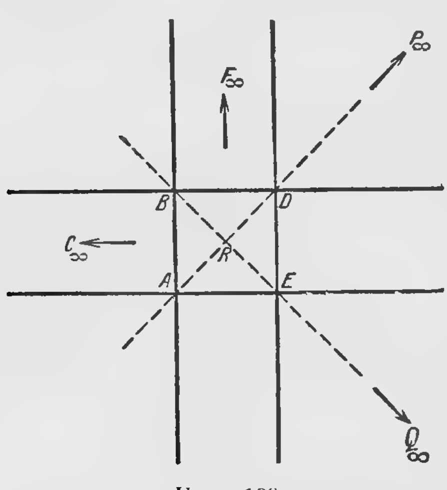
Теперь посмотрим, как следует обобщить понятие инцидентности между точкой и прямой после добавления бесконечно удаленных элементов. Мы будем снова исходить из изображения $e \to A$. *Конечная* точка P инцидентна с *конечной* прямой g в плоскости e тогда и только тогда, когда инцидентны соответствующая прямая p и плоскость γ. Мы обобщим это на любые точки и прямые в плоскости e. Будем называть бесконечно удаленную точку P_u инцидентной с некоторой прямой g тогда, когда луч p_u инцидентен с плоскостью γ. Если плоскости γ и γ_u совпадают и таким образом прямая g является бесконечно удаленной прямой плоскости e, то мы не получаем ничего нового. Если же g есть конечная прямая, то плоскости γ и γ_u пересекаются по некоторой прямой p_u; поэтому всякая конечная прямая имеет одну и только одну бесконечно удаленную точку, а именно, точку пересечения с прямой g_u. Если прямая g' параллельна прямой g, то это эквивалентно тому, что плоскость γ', соответствующая прямой g', проходит через прямую p_u (черт. 129). Таким образом две прямые параллельны тогда и только тогда, если они имеют одну и ту же бесконечно удаленную точку. Таков смысл того оборота речи, которым мы до сих пор пользовались, но который не имеет смысла без разъяснений: параллельные прямые пересекаются в бесконечности. Здесь мы видим основание упомянутого в начале этого параграфа факта, что две параллельные прямые представляются пересекающимися в точке схода, лежащей на горизонте.

В качестве примера того, насколько упрощаются геометрические понятия при введении бесконечно удаленных элементов, мы приведем конические сечения. Так как они представляют собой, как было указано в первой главе, сечения кругового конуса плоскостью, то они могут быть рассматриваемы как перспективные изображения некоторой окружности. В зависимости от того, будет ли один или два проектирующих луча параллельны плоскости проекций или не будет ни одного параллельного луча, мы получаем параболу, гиперболу или эллипс. В соответствии с этим мы можем сейчас сказать: коническое сечение представляет параболу, гиперболу или эллипс в зависимости от того, касается ли оно бесконечно удаленной прямой в одной точке, пересекает ли ее в двух точках или вовсе не пересекается с нею. При центральной

проекции на другую плоскость мы получаем в этих случаях коническое сечение, которое либо касается горизонта, либо пересекается с ним, либо не пересекается. Какого рода будет это коническое сечение — зависит от расположения плоскости изображения.

Вообще центральная проекция представляет важное вспомогательное средство, для того чтобы из фигур специального вида получать более общие; так, например, фигуру полного четырехсторонника (стр. 91) всегда можно получить из простой фигуры, изображенной на черт. 130.

Однако значение бесконечно удаленных элементов состоит прежде всего в том, что они позволяют изменить и существенно упростить аксиоматическое обоснование плоской геометрии. Именно, если ограничиться конечными точками плоскости, то инцидентность точек и прямых определяется следующими аксиомами:



Черт. 130.

1. Две различных точки всегда определяют одну прямую, инцидентную с ними.

2. Две различных точки определяют только одну инцидентную с ними прямую.

Из второй аксиомы следует: две прямые на плоскости имеют либо одну общую точку, либо ни одной, так как если бы они имели две или более общих точек, то они совпали бы в одну единственную прямую.

Случай, когда две прямые на плоскости не имеют общей точки, определяется и ограничивается евклидовой аксиомой параллельности:

Если на плоскости дана произвольная прямая a и произвольная точка A вне прямой a, то в этой плоскости имеется одна и только одна прямая b, проходящая через точку A и не пересекающая прямой a; прямая b называется параллельной к прямой a, проходящей через точку A.

Если теперь мы будем рассматривать не только конечные точки, но расширим нашу плоскость до проективной плоскости, добавив к ней бесконечно удаленную прямую, то вместо упомянутых трех аксиом мы можем положить в основу две следующие аксиомы:

1. Две различные точки определяют одну и только одну прямую.

2. Две различные прямые определяют одну и только одну точку.

К этим двум аксиомам можно свести инцидентность точек и прямых проективной плоскости. При этом отнюдь не следует отличать бесконечно удаленные точки и бесконечно удаленные прямые от других точек и прямых. Если мы захотим осуществить проективную плоскость в виде некоторого образа, в котором равноправность всех точек и всех прямых станет наглядной, то мы можем обратиться снова к пучку прямых и плоскостей, проходящих через определенную точку, причем мы будем рассматри-

вать прямые как «точки», а плоскости — как «прямые». На такой модели легче всего усмотреть справедливость обеих приведенных аксиом.

Эти две аксиомы обладают тем формальным свойством, что они остаются неизменными, если слово «прямая» заменить словом «точка», а слово «точка» заменить словом «прямая». Более детальное исследование показывает, что и в остальных аксиомах плоской проективной геометрии оба эти слова можно обменивать местами без изменения содержания системы аксиом. Но тогда и во всех следствиях и теоремах, выводимых из этих аксиом, оба эти слова должны быть взаимно заменяемы.

Взаимная заменяемость точек и прямых называется принципом двойственности в проективной плоскости. Согласно этому принципу каждому предложению соответствует в силу двойственности другое предложение и точно так же всякой фигуре в силу двойственности соответствует другая фигура. При этом точкам, лежащим на некоторой кривой, соответствует последовательность прямых, которые, вообще говоря, огибают некоторую другую кривую, касаясь ее во всех точках. Более детальное исследование показывает, что семейство прямых, соответствующее в силу двойственности точкам некоторого конического сечения, всегда огибает также некоторое коническое сечение.

Согласно принципу двойственности мы можем из теорем Брианшона вывести ряд других теорем, называемых теоремами Паскаля по имени ученого, доказавшего их. Для того чтобы наглядно показать двойственность обеих групп теорем, выпишем их рядом в соответствующей друг другу форме.

Теоремы Брианшона

1, 2, 3. Пусть некоторый шестиугольник образован из шести прямых, являющихся касательными некоторого конического сечения (шестиугольник, описанный около конического сечения). Тогда линии, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

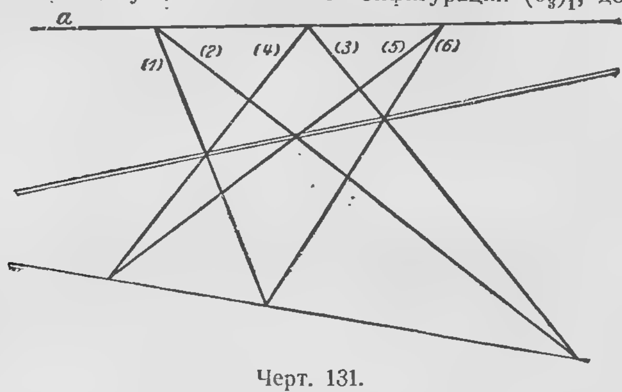
4. Пусть дано шесть прямых, три из которых инцидентны с точкой A, а три других — с точкой B. Выберем шесть точек пересечения так, что эти точки вместе с соответствующими соединяющими их линиями образуют шестиугольник, стороны которого попеременно проходят через точки A и B; тогда линии, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке (брианшонова точка шестиугольника).

Теоремы Паскаля

1, 2, 3. Пусть шестиугольник образован шестью точками, расположенными на некотором коническом сечении (шестиугольник, вписанный в коническое сечение). Тогда три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

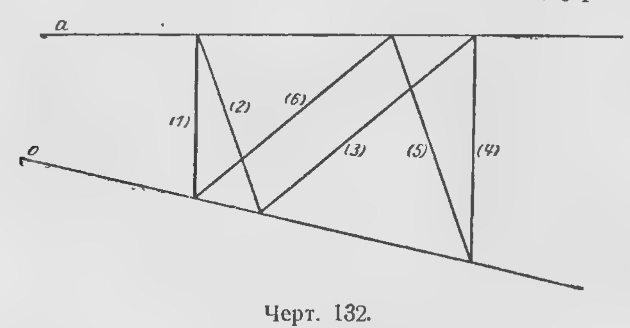
4. Пусть дано шесть точек, из которых три инцидентны с некоторой прямой a, а три другие — с прямой b. Выберем шесть соединяющих их прямых так, что они вместе с соответствующими точками пересечения образуют шестиугольник, вершины которого расположены попеременно на прямых a и b. Тогда точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой (паскалева прямая шестиугольника).

Фигура, соответствующая последней теореме Паскаля, очевидно, должна быть двойственна конфигурации $(9_3)_1$. Но и вообще оказывается, что фигура, двойственная некоторой конфигурации $(p_\gamma g_\pi)$, представляет также конфигурацию и притом типа $(g_\pi p_\gamma)$. Конфигурациям специального вида, которые мы обозначили символом (p_γ), и только этим конфигурациям соответствуют по принципу двойственности конфигурации такого же типа. Казалось бы, что конфигурация теоремы Паскаля, т. е. фигура, соответствующая по принципу двойственности конфигурации $(9_3)_1$, должна пред-



Черт. 131.

ставлять одну из двух других конфигураций (9_3). Оказывается, однако (черт. 131), что и теореме Паскаля соответствует конфигурация $(9_3)_1$. Поэтому мы с самого начала назвали эту конфигурацию конфигурацией Брианшона-Паскаля. Таким образом конфигурация $(9_3)_1$ «двойственно



Черт. 132.

инвариантна». Как брианшонову точку, так и паскалеву прямую мы можем выбрать в конфигурации совершенно произвольно.

Из последней теоремы Паскаля при помощи бесконечно удаленных элементов можно получить частный случай, который без введения этих понятий не мог бы стоять ни в какой познаваемой связи с первоначальной теоремой. Именно, если мы проведем паскалеву прямую в бесконечности, то получим следующее предложение:

Если вершины шестиугольника лежат попеременно на двух прямых и если кроме того две пары противоположных сторон параллельны, то и третья пара сторон должна быть параллельна (черт. 132).

Этот специальный случай теоремы Паскаля называется теоремой Паппа.

После того как мы убедились, что конфигурация $(9_3)_1$ двойственно инвариантна, легко вывести заключение, что и конфигурации $(9_3)_2$ и $(9_3)_3$ должны быть двойственно инвариантными. В самом деле, в противном случае оставалась бы одна возможность, именно, что конфигурация $(9_3)_2$ при применении принципа двойственности перейдет в конфигурацию $(9_3)_3$. Но конфигурация $(9_3)_2$ правильна, а конфигурация $(9_3)_3$ нет. Следовательно, эти две фигуры не могут соответствовать друг другу по принципу двойственности.

Перейдем теперь к конфигурациям (10_3). Для того чтобы представить важнейшую из этих конфигураций, конфигурацию Дезарга, необходимо ввести бесконечно удаленные элементы и принцип двойственности в пространстве.

19. Бесконечно удаленные элементы и принцип двойственности в пространстве. Теорема Дезарга и конфигурация Дезарга (10_3). Производя проектирование в пространстве, мы познакомились с понятием проективной плоскости. Пространство в целом точно так же преобразуется в образ, во многих отношениях более простой, в «проективное пространство», если добавить бесконечно удаленные элементы; однако в этом случае этот метод перестает быть наглядным и может быть обоснован только абстрактно. Прежде всего предположим, что в соответствии с прежним принципом на всех плоскостях обыкновенного пространства введены бесконечно удаленные элементы. Тогда напрашивается мысль назвать бесконечно удаленной плоскостью пространства совокупность бесконечно удаленных точек и прямых. Эта совокупность имеет то общее свойство с обычными плоскостями пространства, что она пересекается со всякой плоскостью по прямой, а именно, по бесконечно удаленной прямой этой плоскости. Со всякой обыкновенной прямой бесконечно удаленная плоскость, так же как и всякая другая плоскость, не содержащая этой прямой, имеет только одну общую точку, именно бесконечно удаленную точку прямой. Далее, две плоскости могут быть параллельны тогда и только тогда, когда они содержат одну и ту же бесконечно удаленную прямую[1]).

Многие свойства геометрии пространства упрощаются при таком представлении. Так, можно рассматривать параллельную проекцию как частный случай центральной проекции, при котором центром проекции служит бесконечно удаленная точка. Далее можно, например, определить разницу между однополостным гиперболоидом и гиперболическим параболоидом тем, что гиперболоид пересекает бесконечно удаленную плоскость по собственному (невыродившемуся) коническому сечению, между тем как параболоид пересекает бесконечно удаленную плоскость вдоль пары образующих прямых. Такое различие равнозначно объяснению, данному на стр. 21, что три не лежащих в одной плоскости прямых лежат на параболоиде, а не на гиперболоиде, тогда и только тогда, когда они параллельны некоторой плоскости; в самом деле, это значит, что эти три прямые пересекают одну бесконечно удаленную прямую, которая должна лежать на этой же поверхности, так как она имеет с ней три общих точки.

---

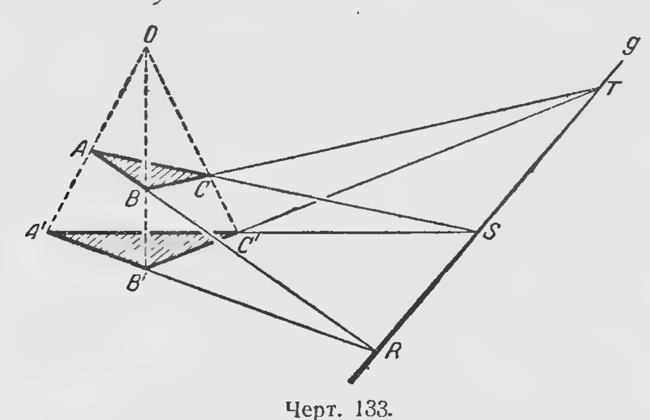
[1]) Так как, с одной стороны, параллельность, а с другой стороны, общность бесконечно удаленных прямых равнозначны тому свойству, что для каждой прямой одной плоскости можно провести параллельную ей прямую в другой плоскости.

В проективном пространстве, очевидно, следует рассматривать все плоскости как проективные плоскости, и следовательно, здесь имеет место принцип двойственности на плоскости. В пространстве в целом имеет место, однако, еще один, отличный от этого, принцип двойственности.

Чтобы получить его, приведем, так же как и в случае плоскости, группу аксиом, которые определяют в проективном пространстве инцидентность точек, прямых и плоскостей, причем мы не будем делать различия между конечными и бесконечно удаленными образами. Эти аксиомы можно сформулировать следующим образом:

1. Две плоскости определяют одну и только одну прямую; три плоскости, не проходящие через одну прямую, определяют одну и только одну точку.

2. Две пересекающиеся прямые определяют одну и только одну точку и одну и только одну плоскость.



Черт. 133.

3. Две точки определяют одну и только одну прямую. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют одну и только одну плоскость.

Эта система аксиом остается неизменной, если обменять местами слова «точка» и «плоскость» (при этом первая аксиома поменяется местами с третьей, а вторая остается неизменной). Точно так же и совокупность всех остальных аксиом проективной геометрии пространства остается при такой замене неизменной, так что в пространстве плоскость и точка двойственно соответствуют друг другу, между тем как прямая соответствует сама себе. Совокупности точек поверхности двойственно соответствует система касательных плоскостей к другой поверхности, причем подобно коническим сечениям на плоскости и в пространстве поверхности второго порядка двойственно соответствуют сами себе.

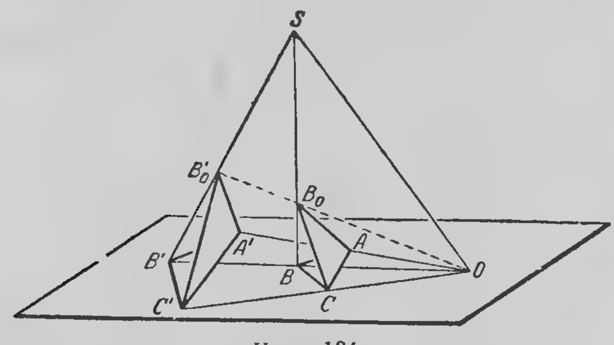
Простейшая и в то же время важнейшая теорема проективной геометрии пространства называется теоремой Дезарга. Теорема Дезарга гласит:

Пусть даны в пространстве два треугольника ABC и $A'B'C'$. Пусть эти треугольники расположены так, что линии, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке O (черт. 133). *Тогда, во-первых, три пары соответствующих сторон треугольников пересе-*

каются в трех точках RST и, во-вторых, эти три точки лежат на одной прямой.

Первая часть теоремы доказывается весьма просто. Две пересекающиеся прямые AA' и BB' определяют согласно второй пространственной аксиоме некоторую плоскость. Но в этой плоскости расположены также и прямые AB и $A'B'$ так, что согласно второй плоскостной аксиоме они пересекаются в некоторой точке R. Остается неопределенным, лежит ли точка R в конечной части пространства или в бесконечности. Существование двух других точек пересечения S и T можно доказать таким же образом.

Вторую часть теоремы легко установить в том случае, когда треугольники расположены в различных плоскостях. Тогда эти плоскости определяют одну — конечную или бесконечно удаленную — прямую пересечения (см. пространственную аксиому 1). Из каждой пары соответствующих сторон треугольников одна расположена в одной плоскости, другая —



Черт. 134.

в другой. А так как обе стороны пересекаются, то точка их пересечения должна лежать на прямой, принадлежащей обеим плоскостям. Таким образом мы доказали теорему Дезарга для общего случая.

Однако особенно важен как раз тот частный случай, когда оба треугольника лежат в одной плоскости. В этом случае доказательство можно провести при помощи проектирования в пространстве, подобно тому как доказывалась теорема Брианшона. Нам следует только доказать, что всякая плоская дезаргова фигура может быть представлена как проекция некоторой пространственной дезарговой фигуры. Для этой цели соединим все точки и прямые плоской дезарговой фигуры с некоторой точкой S, лежащей вне плоскости фигуры (черт. 134). Далее проведем через прямую AC плоскость; пусть эта плоскость пересекается с прямой BS в точке B_0, отличной от точки S. Затем проведем прямую OB_0. Эта прямая лежит в одной плоскости с прямой $B'S$, и таким образом обе прямые пересекаются в точке B_0'. Но тогда треугольники AB_0C и $A'B_0'C'$ образуют пространственную дезаргову фигуру, так как линии, соединяющие соответствующие вершины, проходят через точку O. Линия пересечения плоскостей обоих треугольников изображается при проектировании из точки S в виде прямой на плоскости проекций, причем точки пересечения соответствующих пар сторон рассмотренных первоначально тре-

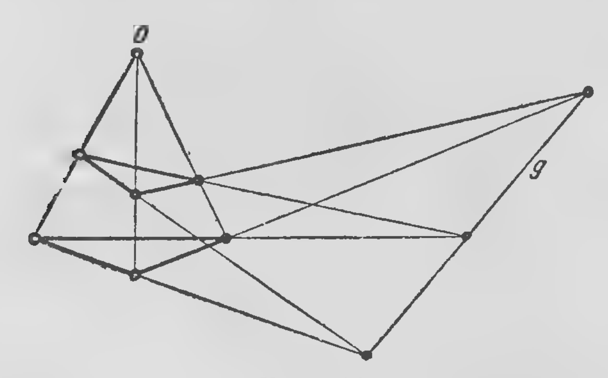
угольников ABC и $A'B'C'$ должны лежать на этой прямой. Таким образом теорема Дезарга доказана полностью.

Как плоский, так и пространственный принципы двойственности приводят к интересным преобразованиям теоремы Дезарга. Прежде всего легко видеть, что справедлива и теорема, обратная теореме Дезарга; из существования дезарговой прямой, на которой лежат точки пересечения пар соответствующих сторон треугольников, следует существование дезарговой точки, через которую проходят прямые, соединяющие соответствующие вершины треугольников. Если же треугольники расположены в одной плоскости, то теорема, двойственная теореме Дезарга по пространственному принципу двойственности, совершенно тождественна с теоремой, получающейся по принципу двойственности на плоскости из теоремы Дезарга. В этом можно убедиться при непосредственном сопоставлении:

Пусть даны три пары точек AA', BB', CC' так, что прямые, соединяющие каждую пару точек, проходят через одну и ту же точку. Тогда три точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежат на одной прямой.

Пусть даны три пары прямых aa', bb', cc' так, что точки пересечения каждой пары лежат на одной прямой; тогда три прямые, соединяющие точки (ab) и $(a'b')$, (bc) и $(b'c')$, (ca) и $(c'a')$, проходят через одну и ту же точку.

Рассмотрим теперь фигуру, состоящую из вершин и сторон двух лежащих в одной плоскости дезарговых треугольников, прямых, соединяющих соответствующие пары вершин, точек пересечения соответствующих пар сторон, дезарговой точки O и дезарговой прямой g (черт. 135). Простой



Черт. 135.

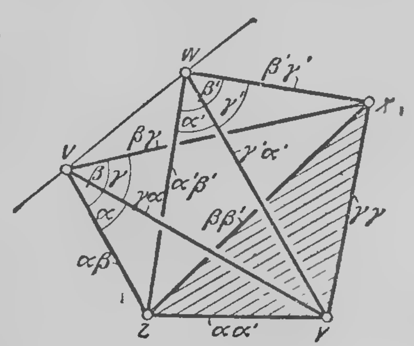
подсчет показывает, что эта фигура представляет конфигурацию (10_3). Она называется дезарговой конфигурацией. Она имеет то общее с конфигурацией Паскаля свойство, что при последовательном построении ее шаг за шагом последняя инцидентность выполняется сама собой. Далее конфигурация Дезарга, так же как и конфигурация Паскаля, двойственно инвариантна. В самом деле, она представляет одновременно как теорему Дезарга, так и ей двойственную теорему, которая выражает предложение, соответствующее теореме Дезарга по принципу двойственности.

Применим к дезарговой теореме в пространстве *пространственный* принцип двойственности. При этом мы получаем такое сопоставление:

Пусть даны три пары точек AA', BB' и CC' так, что прямые, соединяющие каждую пару, проходят через одну и ту же точку. Тогда три точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ должны лежать на одной прямой.

Пусть даны три пары плоскостей $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ так, что линии пересечения этих пар плоскостей лежат в одной плоскости. Тогда три плоскости, проведенные через прямые $(\alpha\beta)$ $(\alpha'\beta')$, $(\beta\gamma)$ $(\beta'\gamma')$, $(\gamma\alpha)$ $(\gamma'\alpha')$, проходят через одну и ту же прямую.

Теорема, написанная справа, наглядно представлена на черт. 136. Вместо двух треугольников мы имеем в этой теореме два телесных угла, образованных плоскостями α, β, γ и α', β', γ'. Подобно тому как мы это делали на плоскости, рассмотрим и здесь пространственную фигуру, составленную из обоих дезарговых углов, плоскостей, проведенных через соответствующие ребра, линий пересечения соответствующих граней, «дезарговых плоскостей» ($\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ на черт. 136) и «дезарговой прямой» (VW на черт. 136). Если мы пересечем эту пространственную фигуру произвольной плоскостью, не проходящей через точки V, W, X, Y, Z, то мы получим в этой плоскости дезаргову конфигурацию, так как ребра дезарговых телесных углов образуют в пересечении с плоскостью вершины дезарговых треугольников. Плоскостям и прямым пространственной фигуры соответствуют прямые и точки плоской конфигурации. Но пространственная фигура обладает внутренней симметрией, которую нельзя усмотреть в плоской конфигурации, именно — пространственная фигура состоит из всех плоскостей и прямых, соединяющих пять точек V, W, X, Y, Z, причем эти пять точек вполне равноправны. Обратно, всякий пространственный пятиугольник приводит к пространственной дезарговой фигуре, если произвольно выбрать две вершины [1]). А так как в пространственной фигуре все прямые и плоскости равноправны, то и точки и прямые плоской дезарговой конфигурации должны быть также равноправными. Таким образом мы доказали, что дезаргова конфигурация правильна и что можно произвольно выбрать дезаргову точку или дезаргову прямую в конфигурации [2]).



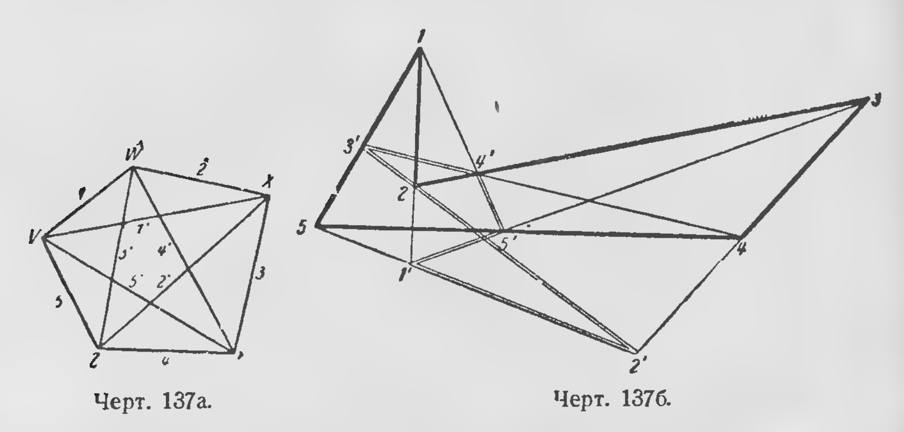
Черт. 136.

---

[1]) При этом необходимо только, чтобы взятые 5 точек имели общее расположение, т. е. чтобы никакие 4 из них не лежали в одной плоскости, а также чтобы никакие 3 не лежали на одной прямой.

[2]) Полным пространственным n-угольником называется совокупность всех прямых и плоскостей, соединяющих n точек, произвольно расположенных в пространстве. Как для случая $n=5$, так и для произвольного n, мы всегда получим конфи-

Теперь мы представим дезаргову конфигурацию как пару пятиугольников, одновременно описанных и вписанных друг в друга. Для этого нам придется сначала найти вообще те пятиугольники, которые входят в конфигурацию. Итак, мы требуем, чтобы все вершины и стороны многоугольника были элементами конфигурации и чтобы никакие три последовательных вершины не лежали на одной прямой. Задача значительно упрощается, если мы обратимся к пространственному пятиугольнику. Вершинам плоского многоугольника соответствуют ребра пространственного многоугольника. Так как две последовательные вершины плоского многоугольника должны лежать на одной прямой конфигурации, то соответствующие ребра лежат в одной плоскости и, следовательно, инцидентны. Для того чтобы три последовательных вершины лежали на одной прямой, необходимо только потребовать, чтобы соответствующие ребра лежали в одной плоскости. Это будет в том и только в том слу-



Черт. 137а. Черт. 137б.

чае, если три последовательные ребра образуют треугольник. Если теперь мы будем в каком-нибудь порядке обходить основные точки $VWXYZ$ пространственного пятиугольника, например в порядке, в каком они здесь выписаны, то мы получим замкнутую последовательность ребер, как это нам и требуется. Она и даст нам в конфигурации пятиугольник, который нам нужен. Стороны пространственного пятиугольника, которые при таком обходе остаются неиспользованными, образуют второй пространственный многоугольник подобного же рода. Таким образом через каждую основную точку пространственного пятиугольника проходят две таких стороны, так как всего из каждой основной точки выходят четыре ребра

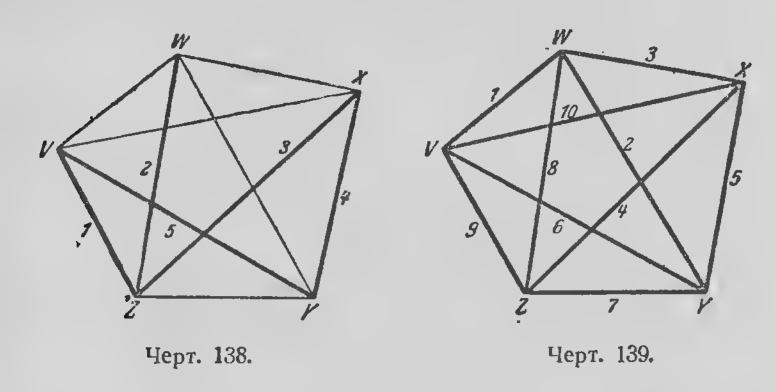
гурацию, если пересечем полный n-угольник некоторой плоскостью, не проходящей ни через одну вершину. Все такие конфигурации правильны. Они принадлежат к типу

$$p=\frac{n(n-1)}{2},\quad \gamma=n-2,\quad g=\frac{n(n-1)(n-2)}{6},\quad \pi=3.$$

Таким образом конфигурация специального типа $p=g$ получается только для случая $n=5$. Дальнейшие правильные конфигурации получаются, если исходить из n-угольников произвольного расположения в пространствах высших измерений. Все такие конфигурации называются «многогранными».

и два из них уже были использованы при первом обходе. Второй последовательности ребер соответствует в конфигурации второй пятиугольник, и простые соображения показывают, что он должен быть вписан в первый. Но из соображений симметрии также и первый пятиугольник должен быть вписан во второй. На черт. 137а и б изображено соотношение между пространственной схемой и парой плоских пятиугольников.

Оказывается, что можно притти к пространственному пятиугольнику, соответствующему плоскому пятиугольнику, входяшему в конфигурацию, при помощи систем из пяти ребер другого рода. Пример этого мы видим на черт. 138. Но можно убедиться, что в этом случае никак нельзя расположить пять остальных ребер циклически так, чтобы два последовательных ребра всегда были инцидентны, а три последовательных никогда не составляли бы треугольника. Поэтому построение, указанное вначале, исчерпывает все возможности. А так как всякая перестановка основных точек соответствует автоморфизму конфигурации и так как разбиение



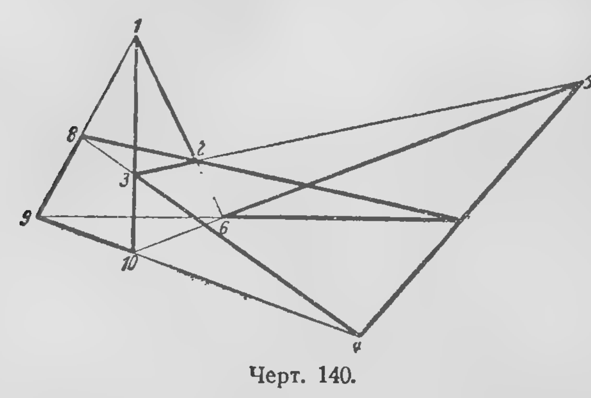
Черт. 138. Черт. 139.

пространственного пятиугольника на две последовательности ребер вполне определяется последовательностью основных точек в первом расположении ребер, то мы видим, что, не считая автоморфизмов, существует только одна возможность разбиения дезарговой конфигурации на два взаимно вписанных пятиугольника.

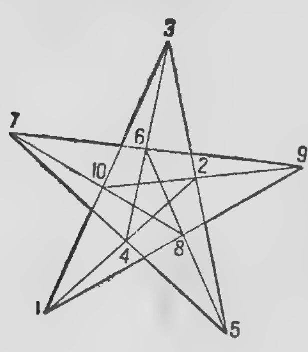
Подобным же образом можно решить вопрос о том, можно ли представить дезаргову конфигурацию в виде десятиугольника, вписанного и описанного вокруг самого себя, и если можно, то сколькими способами. Легко убедиться, что соответствующая пространственная последовательность ребер в этом случае всегда должна быть расположена так, как показано на черт. 139. Таким образом существует один и только один (исключая автоморфизмы) способ представить дезаргову конфигурацию как десятиугольник, вписанный и описанный вокруг самого себя (черт. 140). Эта фигура выявляет определенную закономерность. Именно, если мы хотим притти к другой вершине, лежащей на той же стороне, то нам приходится попеременно при обходе десятиугольника пропускать одну или три вершины (вершина 5 на стороне 23, 8 на стороне 34, 7 на стороне 45, 10 на стороне 56 и т. д.). В пространственной схеме можно обнаружить еще и другое свойство этого десятиугольника, а именно то,

что его стороны, взятые через одну, образуют два вписанных друг в друга пятиугольника.

Дезаргова конфигурация не есть единственная конфигурация типа (10_3). Схема подобной конфигурации допускает еще девять других возможностей. Одна из этих схем, точно так же как конфигурация (7_3), не может быть осуществлена ни в действительных, ни в комплексных величинах, так как ее уравнения противоречивы. Напротив, остальные восемь, подобно конфигурациям типа (9_3), всегда могут быть построены при посредстве одной линейки. Однако в противоположность дезарговой конфигурации во всех остальных восьми осуществимых конфигурациях (10_3) последняя инцидентность не выполняется сама собой, следовательно, они не выражают никакой общей геометрической теоремы и потому менее важны, чем конфигурация Дезарга. Одна из этих конфигураций изображена на черт. 141. В приведенной последовательности точек эта конфигурация опять-таки представляет десятиугольник, вписанный и описанный вокруг самого себя. Но в этой фигуре необходимо всякий раз пропускать только одну вершину, чтобы при обходе переходить от одной вершины к другой, расположенной на той же стороне многоугольника. Благодаря этому все вершины являются равноправными, а все стороны могут меняться местами с вершинами, откуда можно заключить, что эта конфигурация должна быть правильной и двойственно инвариантной.



Черт. 140.



Черт. 141.

20. Сопоставление теорем Паскаля и Дезарга. Мы обнаружили далеко идущие аналогии между теоремой Дезарга и последней теоремой Паскаля. Обе эти теоремы были доказаны при помощи проектирования в пространстве; обе теоремы приводили нас к конфигурациям, причем эти конфигурации во многих отношениях подобны: обе конфигурации были правильны, двойственно инвариантны и могли быть осуществлены при помощи линейки; в обеих конфигурациях последняя инцидентность выполнялась сама собой и обе могли быть представлены как многоугольники, вписанные и описанные вокруг самих себя.

Тем не менее между двумя этими теоремами существует принципиальная разница. При доказательстве теоремы Дезарга мы пользовались пре-

странственной фигурой, которая может быть построена на основе только введенных нами пространственных аксиом связи без всяких других аксиом. Напротив, конфигурация Брианшона-Паскаля получалась при рассмотрении поверхности второго порядка. С первого взгляда кажется, что центральным пунктом доказательства служит чистое рассмотрение инцидентности между точками, прямыми и плоскостями пространственного шестиугольника; однако более детальное исследование показывает, что построение подобных пространственных шестиугольников по существу равнозначно с построением линейчатой поверхности второго порядка и что возможность подобного построения не может быть доказана только на основании аксиом связи.

В первой главе мы ввели конические сечения и поверхности второго порядка путем метрических исследований. Можно было бы думать поэтому, что теорема Паскаля не может быть доказана без измерения отрезков и углов. Однако можно получить кривые и линейчатые поверхности второго порядка и без метрических вспомогательных средств, если пользоваться только методом проекций. При таком методе можно отображать точки прямой на точки произвольной другой прямой таким образом, что гармоническая четверка точек всегда будет изображаться в виде гармонической же четверки и что три произвольно заданных точки одной прямой будут изображаться тремя произвольно заданными точками другой прямой. В таком случае говорят, что одна прямая проективно отображается на другую[1]). Построение подобного отображения основывается исключительно на аксиомах связи на плоскости и в пространстве. Напротив, при помощи одних только этих аксиом нельзя заключить, что отображение, удовлетворяющее двум указанным требованиям — инвариантности гармонического расположения точек и произвольного выбора изображений трех точек, — однозначно определено для всех точек прямой. Для этой цели необходима еще аксиома непрерывности, которую мы ниже и сформулируем. Но если только доказана однозначность проективного отображения в указанном смысле, то линейчатую поверхность второго порядка самого общего вида можно определить как поверхность, образуемую переменной прямой, соединяющей соответствующие точки двух прямых, приведенных в проективное соответствие и не лежащих в одной плоскости. Тогда из однозначности проективного отображения следует, что на такой поверхности должно лежать еще одно семейство прямых. Если проективно расположенные друг к другу прямые инцидентны, то прямая, соединяющая соответствующие точки, служит огибающей плоской кривой второго порядка. Все существенные для проективной геометрии свойства кривых второго порядка можно вывести из этого определения.

Для полного охвата понятия непрерывности необходимы две различных аксиомы; при доказательстве однозначности проективного отображения используется только одна из них, именно *архимедова* аксиома. В арифметическом выражении эта аксиома гласит: пусть даны два произвольных положительных числа a и A, из которых a может быть сколь

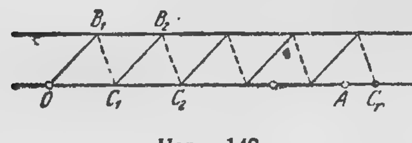
---

[1]) При этом предполагается, что это отображение может быть осуществлено с помощью конечного числа проектирований и сечений. См. A. Commesdatti, Geometria non staudtiana. Bolletino di Matematica, 1930.

угодно мало, а A сколь угодно велико; тогда можно число a складывать само с собой столько раз, что сумма после конечного числа суммирований станет больше A:

$$a+a+a+\ldots+a>A.$$

Эта аксиома необходима, когда приходится измерять некоторое расстояние при помощи определенной длины (масштаба), и таким образом в такой форме она представляет важнейшую основу метрики. Независимое от метрических понятий выражение этой аксиомы следующее. Пусть даны две параллельные прямые (черт. 142) и пусть на одной из этих прямых лежат две различных точки O и A. Проведем теперь из точки O прямую, соединяющую ее с произвольной точкой B_1 другой прямой, и точку B_1 соединим снова прямой линией с некоторой точкой C_1 первой прямой, лежащей между точками O и A. Затем проведем через точку C_1 прямую, параллельную OB_1, которая пересечет другую вторую в некоторой точке B_2. Из этой точки опять проведем прямую, параллельную B_1C_1, которая пересечет первую прямую в точке C_2. Если мы будем таким образом проводить и дальше параллели к прямым OB_1 и B_1C_1, то архимедова аксиома утверждает, что в конце концов после конечного числа шагов мы придем к некоторой точке C_r, которая уже не будет расположена между точками O и A. В этой формулировке мы использовали представление о том, что одна точка некоторой прямой лежит между двумя другими точками этой же прямой. Высказывания подобного рода уточняются другой группой аксиом, так называемыми аксиомами расположения или порядка, в рассмотрение которых мы здесь не будем входить. Напротив, понятие параллельности мы использовали здесь только для того, чтобы более кратко и наглядно сформулировать аксиому; в проективной геометрии достаточно было бы потребовать возможность такого построения, какое изображено на черт. 143. Эта фигура получается из черт. 142 как его центральная проекция на другую плоскость.



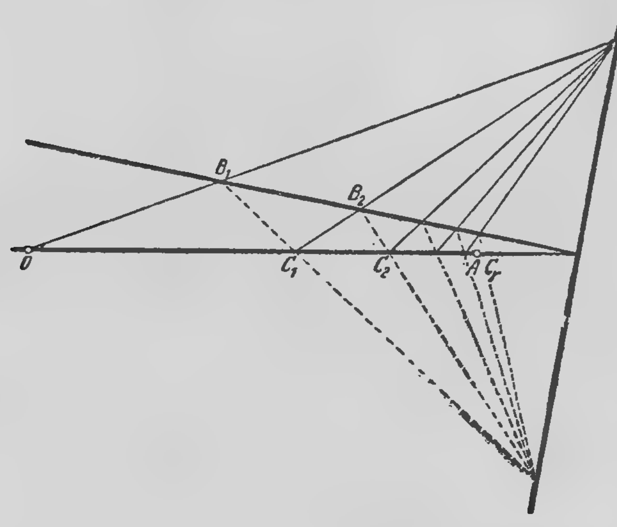
Черт. 142.

Аксиомы связи на плоскости и в пространстве, аксиомы расположения и архимедова аксиома достаточны для доказательства однозначности проективного отображения, но это доказательство чрезвычайно длинно и утомительно. Из однозначности проективного отображения на плоскости можно вывести последние теоремы Паскаля и Брианшона (не используя при этом вспомогательных пространственных построений).

Теорема Дезарга может быть доказана в пространстве только при посредстве аксиом связи; если же мы хотим доказать эту теорему на плоскости, не выходя в пространство, то нельзя обойтись без аксиом конгруэнтности, если даже принять архимедову аксиому и аксиомы расположения. Но зато для доказательства здесь достаточно будет принять аксиомы связи и расположения на плоскости и аксиомы конгруэнтности. Архимедова же аксиома не нужна.

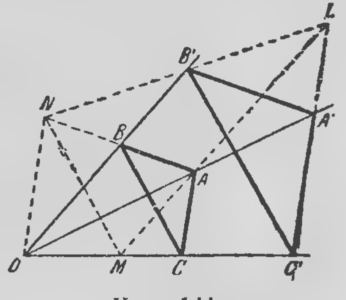
Если исключить пространственные аксиомы связи, то в отношении последней теоремы Паскаля можно сказать то же, что в отношении дезар-

говой теоремы. Для ее доказательства достаточны тогда плоские аксиомы связи, аксиомы расположения и конгруэнтности. Тем не менее даже и без пространственных вспомогательных построений можно установить существенную разницу между обеими теоремами также и на плоскости. Именно, если принять на плоскости аксиомы связи и считать справед-



Черт. 143.

ливой дезаргову теорему, то теорему Паскаля доказать нельзя. Напротив, теорему Дезарга можно доказать, если принять плоские аксиомы связи и теорему Паскаля. Мы проведем доказательства для частного случая, когда дезаргова прямая есть бесконечно удаленная прямая плоскости. Такое предположение служит, так же как при установлении архимедовой аксиомы, только для того, чтобы провести доказательство короче и нагляднее. Таким образом мы заранее принимаем следующее (черт. 144):



Черт. 144.

Три прямые AA', BB', CC' проходят все через одну и ту же точку O. Кроме того $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$. Теперь с помощью последней теоремы Паскаля следует доказать, что будет иметь место также $BC \parallel B'C'$.

Для доказательства проведем через точку A прямую, параллельную OB; пусть эта прямая пересекается с прямой $A'C'$ в точке L, а с прямой OC в точке M. Далее пусть прямая LB' пересекает прямую AB в точке N. Теперь трижды применим к этой фигуре теорему Паскаля и притом в той частной ее форме, которая была приведена на стр. 110 и названа теоремой Паппа. Прежде всего шестиугольник $ONALA'B'$ есть шестиугольник Паскаля, так как каждые три его вершины, взятые через одну, ле-

жат на одной и той же прямой. Но мы имеем по предположению $NA \parallel A'B'$; кроме того по построению $AL \parallel B'O$. По теореме Паппа и третья пара противоположных сторон этого шестиугольника параллельна, т. е. $ON \parallel A'L \parallel AC$. Теперь рассмотрим шестиугольник Паскаля $ONMACB$. В этом шестиугольнике $ON \parallel AC$, как уже доказано, и $MA \parallel BO$ по предположению. Поэтому по теореме Паппа $NM \parallel CB$. В заключение рассмотрим шестиугольник Паскаля $ONMLC'B'$. В этом шестиугольнике $ON \parallel LC'$ и $ML \parallel B'O$. Отсюда следует, как и выше, что $NM \parallel C'B'$. Но так как уже было доказано, что $NM \parallel CB$, то отсюда и следует наше утверждение: $BC \parallel B'C'$.

Все теоремы относительно точек пересечения на плоскости можно вывести из теорем Дезарга и Паскаля. Так как теперь мы получили теорему Дезарга в качестве следствия из теоремы Паскаля, то мы можем сказать, что теорема Паскаля является единственной существенной теоремой о точках пересечения на плоскости и что, следовательно, конфигурация $(9_3)_1$ является важнейшей фигурой в плоской геометрии.

21. Предварительные замечания относительно пространственных конфигураций. Понятие конфигурации можно обобщить на пространство. Система точек и плоскостей называется пространственной конфигурацией, если каждая точка инцидентна с одним и тем же числом плоскостей и каждая плоскость с одним и тем же числом точек. Простой пример подобной конфигурации представляет пространственная теорема Дезарга. В качестве точек конфигурации мы можем взять при этом те же десять точек, какие мы брали для соответствующей плоской фигуры. В качестве плоскостей конфигурации мы возьмем две плоскости обоих треугольников и три плоскости, проходящие через стороны треугольников и дезаргову точку. Тогда через каждую точку проходят три плоскости и в каждой плоскости лежат шесть точек. На том же основании, как в случае плоской конфигурации, четыре характеристических для данной конфигурации числа удовлетворяют определенному уравнению. Именно: $5 \cdot 6 = 10 \cdot 3$.

Но в пространстве можно рассматривать наряду с конфигурациями, состоящими из точек и плоскостей, также и конфигурации, состоящие, как и на плоскости, из точек и прямых, причем каждая точка инцидентна с одним и тем же числом прямых и каждая прямая с одним и тем же числом точек. Эти два различных представления часто можно применять к одной и той же фигуре. Так, только что рассмотренная пространственная дезаргова фигура представляет пространственную конфигурацию из точек и прямых, по существу тождественную с плоской дезарговой конфигурацией. Точно так же и во многих других, более общих случаях определенные прямые пересечения плоскостей, встречающиеся в конфигурации из точек и плоскостей, образуют вместе с точками конфигурации конфигурацию, состоящую из точек и прямых; обратно, часто можно превратить конфигурацию из точек и прямых в конфигурацию из точек и плоскостей, если добавить определенные плоскости, в которых лежат прямые конфигурации.

Мы ограничимся сначала, так же как и для плоскости, тем случаем, когда число точек и плоскостей одинаково, т. е. когда мы имеем конфигурацию точек и плоскостей, состоящую из p точек и p плоскостей. Если при этом всякая точка инцидентна с n плоскостями, то по

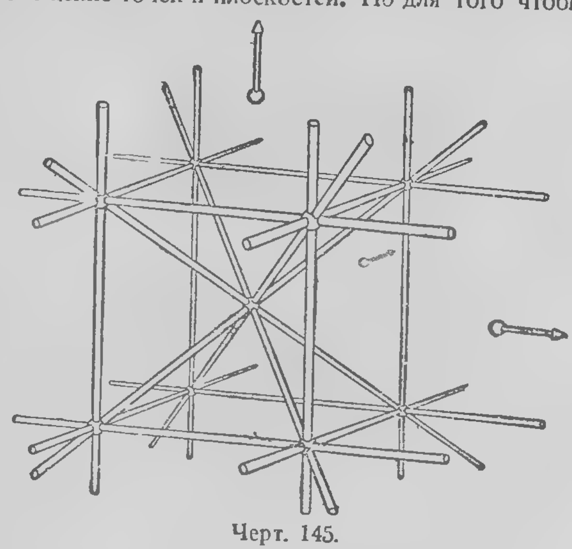
тем же основаниям, как и на плоскости, всякая плоскость конфигурации инцидентна с n точками; такие конфигурации мы будем обозначать через (p_n).

Для того чтобы исключить тривиальные случаи, примем, что n не меньше 4. Для $p \leqslant 7$ конфигурация (p_4) невозможна. Но если $p=8$, то мы сразу же получаем возможность установить пять различных схем, причем все они могут быть осуществлены геометрически. Одна из этих конфигураций (8_4), так называемая конфигурация Мебиуса, имеет важное геометрическое значение, так как последняя инцидентность здесь выполняется сама собой, и потому эта конфигурация выражает определенную геометрическую теорему. Эта конфигурация состоит из двух тетраэдров, одновременно вписанных и описанных около друг друга.

При переходе к конфигурациям более высокого порядка мы будем получать все большее число возможностей, так что очень быстро обозрение их делается невозможным. Так, например, имеются уже 26 геометрически осуществимых конфигураций (9_4). Поэтому мы рассмотрим подробнее только две особенно важные пространственные конфигурации, которые играют известную роль в математических проблемах другого рода. Это — конфигурация Рейе (Reye) и двойной шестисторонник Шлефли (Schläfli).

22. Конфигурация Рейе. Конфигурация Рейе состоит из двенадцати точек и двенадцати плоскостей. Она выражает проективно-геометрическую теорему, так что последняя инцидентность выполняется здесь сама собой, как бы ни выбрали расположение точек и плоскостей. Но для того чтобы получить наглядное представление о конфигурации Рейе, мы сначала выберем специальное симметрическое расположение отдельных точек конфигурации.

В качестве точек конфигурации выберем восемь вершин куба, затем центр куба и наконец три бесконечно удаленных точки, в которых пересекаются по четыре параллельных ребра куба (черт. 145). В качестве плоскостей конфигурации выберем шесть граней куба и шесть диагональных плоскостей, проходящих через каждые два противоположных ребра. В каждой плоскости получившейся таким образом фигуры расположено шесть точек, а именно: четыре вершины и две бесконечно удаленных точки на каждой грани куба и четыре вершины, один центр куба и одна бесконечно удаленная точка на каждой диагональной плоскости. С другой стороны, в каждой точке пересекаются шесть плоскостей,



Черт. 145.

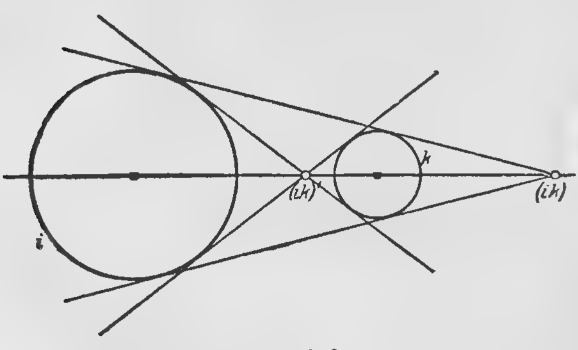
а именно: в центре куба шесть диагональных плоскостей, в каждой вершине куба три диагональных плоскости и три грани куба и в бесконечно удаленных точках четыре грани куба и две диагональных плоскости. Таким образом мы действительно получили при нашем построении конфигурацию из точек и плоскостей, символом которой являются (12_6).

Мы можем, однако, рассматривать нашу фигуру как конфигурацию точек и прямых, если в качестве прямых выбрать некоторые прямые пересечения заданных выше плоскостей, именно двенадцать ребер и четыре главных диагонали куба. Каждая из этих прямых содержит три точки конфигурации, а именно, каждое ребро — две вершины и одну бесконечно удаленную точку и каждая диагональ — две вершины и центр. Далее, через каждую точку проходят четыре прямых, именно: через вершины три ребра и одна главная диагональ, через центр — четыре главных диагонали и через каждую бесконечно удаленную точку четыре ребра. Точки и прямые конфигурации Рейе образуют таким образом конфигурацию $(12_4 16_3)$.

Далее, можно подсчитать, что через всякую прямую проходят три плоскости и в каждой плоскости лежат четыре прямых. Они образуют вместе с шестью лежащими в этой плоскости точками прямые и точки полного четырехсторонника.

Конфигурация Рейе играет роль в некоторых геометрических соотношениях, например в системе точек подобия четырех шаров, которую мы сейчас и рассмотрим.

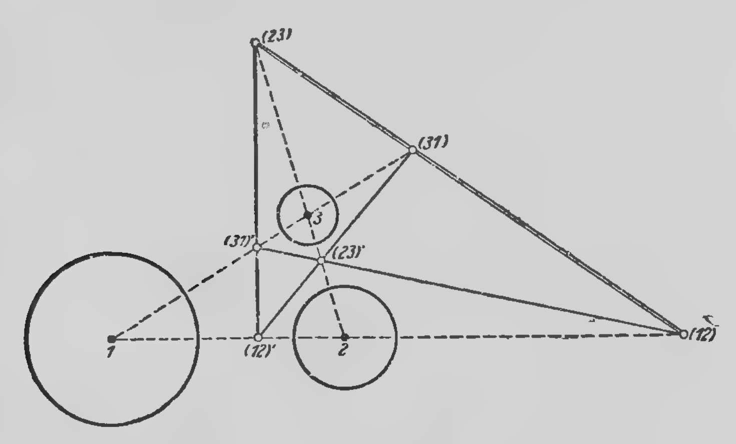
Подобными точками двух кругов или шаров, как известно, называют те две точки прямой, соединяющей центры кругов или шаров, которые делят эти отрезки внешним или внутренним образом в отношении, равном отношению радиусов. Точка, расположенная между центрами шаров, называется внутренней, а точка, лежащая на продолжении линии центров, — внешней точкой подобия. Если два круга являются внешними друг к другу, то во внутренней точке подобия пересекаются обе прямые, касающиеся кругов с разных сторон, а во внешней точке подобия—обе прямые, касающиеся кругов с одной и той же стороны (черт. 146). Вращая получившуюся фигуру вокруг линии центров, обнаружим аналогичные свойства касательных и точек подобия для двух шаров (однако в случае шаров имеется еще бесконечно много общих касательных, которые не проходят через точки подобия). Будем обозначать через (ik) внешнюю точку подобия и через $(ik)'$ — внутреннюю точку подобия двух кругов или шаров i, k.



Черт. 146.

Рассмотрим теперь три круга или шара 1, 2, 3. Они имеют три внутренних и три внешних, т. е. всего шесть точек подобия. Представим

себе, что центры шаров (или кругов) расположены не на одной прямой, а в вершинах некоторого треугольника, так что никакие две точки подобия не совпадают и все шесть точек подобия не лежат на одной прямой. По теореме Монжа тогда три внешних точки подобия (12), (23) и (31) всегда лежат на одной прямой (черт. 147); точно так же на одной прямой лежат одна внешняя точка подобия и две внутренние точки подобия, не соответствующие этой внешней, например (12)′, (23)′ и (31)[1]. Все точки подобия расположены поэтому на четырех прямых, которые называются осями подобия кругов (или шаров) 1, 2, 3. Можно усмотреть справедливость теоремы Монжа из того, что точки и оси подобия образуют шесть точек и четыре прямых некоторого полного четырехсторонника, диагональный треугольник которого образуется цент-



Черт. 147.

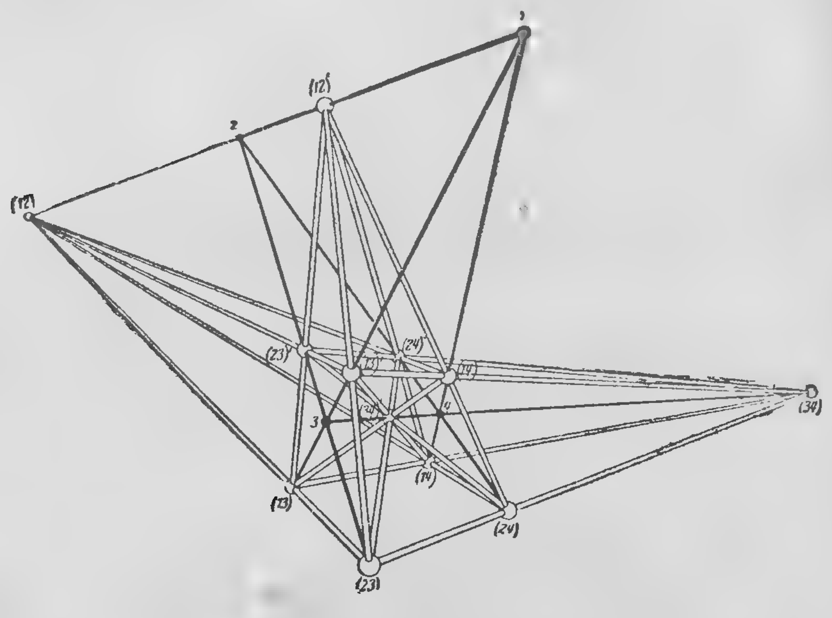
рами (кругов или шаров) 1, 2, 3. Введем символическое обозначение для осей подобия: обозначим через (123) ось, проходящую через внешние точки подобия, через (1′23) ось, на которой расположены точки (23), (12)′, (13)′ и т. д.

После этих предварительных замечаний перейдем к четырем шарам 1, 2, 3, 4, центры которых не лежат все в одной плоскости, так что никакие три центра не могут лежать также и на одной прямой (черт. 148). Мы утверждаем, что совокупность точек и осей подобия этих шаров образуют точки и прямые некоторой конфигурации Рейе. Так как из четырех чисел 1, 2, 3, 4 можно образовать шесть различных пар и каж-

---

[1]) Доказательство: пусть r_1 r_2 r_3 — радиусы шаров (или окружностей) 1, 2, 3; тогда стороны треугольника, образованного центрами, делятся внешними точками подобия в отношениях $-\frac{r_1}{r_2}$, $-\frac{r_2}{r_3}$, $-\frac{r_3}{r_1}$. Так как произведение этих отношений равно -1, то внешние точки подобия по теореме Менелая лежат на одной прямой. Если заменить две внешние точки подобия соответствующими внутренними точками подобия, то два отношения изменят знак на обратный. При этом произведение снова равно -1, т. е. мы снова получаем три точки, лежащие на одной прямой.

дая пара представляет одну внешнюю и одну внутреннюю точку подобия, то всего имеется двенадцать точек подобия. Точно так же истинное число осей шестнадцать. Именно, из четырех цифр можно образовать четыре различных тройки и каждая тройка представляет четыре различных оси, например (123), (1'23), (12'3) и (123'). Каждая ось инцидентна с тремя точками. Например ось (123) инцидентна с точками (12), (23), (13). Точно так же каждая точка инцидентна с четырьмя осями, например точки (12) с осями (123), (123'), (124), (124') или точка (12)' с осями (1'23), (12'3), (1'24) (12'4).



Черт. 148.

Таким образом точки и оси подобия действительно образуют конфигурацию (12_4 16_3). Чтобы убедиться в тождественности этой конфигурации с конфигурацией Рейе, необходимо найти еще двенадцать соответствующих плоскостей. Возьмем сначала четыре плоскости, в каждой из которых лежат по три центра шара; в каждой из этих плоскостей инцидентные с ней точки и оси образуют, так же как в конфигурации Рейе, четырехсторонник. Чтобы найти теперь еще восемь таких плоскостей, возьмем просто все недостающие плоскости, которые образуются каждыми двумя инцидентными с некоторой точкой конфигурации осями. Эти оси во всяком случае должны принадлежать к различным тройкам чисел, так как две оси одной и той же тройки, например (123) и (1'23), определяют всегда плоскость трех центров шаров (в нашем примере плоскость (123), и, следовательно, не дают ничего нового. Возьмем сначала две оси, содержащие только внешние точки подобия, например (123) и (124). Они определяют плоскость, проходящую через точку (12). В этой плоскости лежат еще четыре других точки этих осей (13),

(23), (14), (24). Но точки (23) и (24) лежат, кроме того, на другой оси (234), которая содержит также еще одну недостающую внешнюю точку подобия (34). Таким образом шесть внешних точек подобия лежат всегда в одной и той же плоскости, которую мы рассмотрели. Эта плоскость содержит кроме осей (123) и (124) две другие «внешние» оси (134) и (234): таким образом она действительно инцидентна с шестью точками и четырьмя прямыми. Возьмем теперь случай одной внешней и одной внутренней осей, принадлежащих к различным тройкам чисел и инцидентных; так как они могут пересекаться только во внешней точке подобия и так как все цифры равноправны, то мы можем выбрать оси (123) и (124′). На этих осях кроме точки пересечения (12) лежат еще точки (13), (23), (14)′ и (24)′. Так же как прежде, мы можем заключить, что в этой плоскости лежат еще оси (134′) и (234′) и точка (34)′. Таким образом мы находим, что три внутренние точки подобия, которые определяются шаром 4 и остальными шарами, вместе с тремя внешними точками подобия тройки 1, 2, 3 лежат в одной плоскости. Плоскостей такого рода должно быть четыре. Мы еще не рассмотрели случая, который получается, если исходить из двух внутренних инцидентных осей; оказывается, что на только что рассмотренной плоскости лежат три попарно инцидентных внутренних оси, но они всегда имеют одну общую внутреннюю точку подобия. Поэтому мы будем исходить из двух осей, например (123′) и (124′), которые пересекаются во внешней точке подобия — в нашем случае в точке (12). В плоскости, определяемой ими, кроме точки пересечения (12) лежат еще точки (13)′, (23)′, (14)′, (24)′. Следовательно, в этой плоскости лежат также оси (1′34) и (2′34) и точка (34). Поэтому эта плоскость содержит четыре внутренних оси; она пересекается с ребрами 1,2 и 3,4 тетраэдра 1, 2, 3, 4 во внешних точках подобия; с остальными четырьмя ребрами — во внутренних точках подобия. Такого рода плоскостей должно быть три, так как каждый тетраэдр содержит три пары противоположных ребер. Таким образом мы получили по нашему способу всего $1+4+3=8$ плоскостей.

Для более легкого обозрения мы приведем еще две схемы (см. стр. 128), устанавливающие инцидентность между точками и плоскостями и между осями и плоскостями. Грани тетраэдра мы обозначаем через I, II, III, IV, причем грань I противоположна точке 1. Плоскость внешних точек подобия обозначим через e_a, а четыре плоскости, содержащие по три внешних и три внутренних точки подобия, обозначим через e_1—e_4. Наконец три остальные плоскости соответственно парам ребер тетраэдра обозначим через (12, 34), (13, 24) (14, 23). При обозначении точек и прямых в нашей таблице для сокращения опущены скобки.

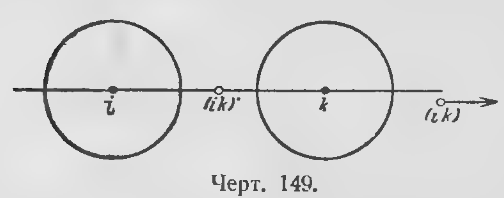
На черт. 148 изображена эта конфигурация [1]). В том, что эта конфигурация тождественна с конфигурацией, изображенной на черт. 145, легко убедиться, если вообразить, что точки (12), (12)′ и (34) удалены в бесконечность в направлениях, попарно перпендикулярных друг другу.

[1]) Если представить себе черт. 148 как *плоскую* фигуру, то он изобразит плоскую конфигурацию $(12_4\,16_3)$, состоящую из точек подобия и осей четырех окружностей, лежащих в одной плоскости. При этом центрами снова служат точки 1, 2, 3, 4, а радиусы можно взять такими же, как в пространственном случае.

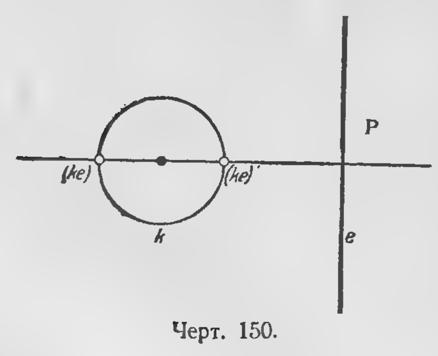
	Плоскости											
	I	II	III	IV	e_a	e_1	e_2	e_3	e_4	(12, 34)	(13, 34)	(14, 23)
Точки	23 24 34 23' 24' 34'	13 14 34 13' 14' 34'	12 14 24 12' 14' 24'	12 13 23 12' 13' 23'	12 13 14 23 24 34	23 24 34 12' 13' 14'	13 14 34 12' 23' 24'	12 14 24 13' 23' 34'	12 13 23 14' 24' 34'	12 34 13' 14' 23' 24'	13 24 12' 14' 23' 34'	14 23 12' 13' 24' 34'

	Плоскостей											
	I	II	III	IV	e_a	e_1	e_2	e_3	e_4	(12, 34)	(13, 24)	(14, 23)
Прямые . . .	234 2'34 23'4 234'	134 1'34 13'4 134'	124 1'24 12'4 124'	123 1'23 12'3 123'	123 124 134 234	234 1'23 1'24 1'34	134 12'3 12'4 2'34	124 123' 13'4 23'4	123 124' 134' 234'	123' 124' 1'34 2'34	12'3 1'24 134' 23'4	1'23 12'4 13'4 234'

Тогда эти точки превратятся в три бесконечно удаленные точки конфигурации, изображенной на черт. 145. Восемь точек (13), (14), (23), (24), (13)', (14)', (23)', (24)' превратятся в вершины куба, а (34)' — в центр куба. В этом случае, однако, и точки 1 и 2 удалятся в бесконечность. Чтобы определить также и четыре шара, соответствующих черт. 145, нам придется обобщить определение точек подобия путем добавления предельных случаев. Прежде всего следует рассматривать в качестве внешней точки подобия кругов и шаров одинакового радиуса бесконечно удаленную точку, лежащую на линии центров (черт. 149). Если рассматривать далее шар k и плоскость e (черт. 150), то следует принять в качестве точек подобия этих двух образов конечные точки (ke) и $(ke)'$ диаметра шара, перпендикулярного к плоскости e. Именно, если плоскость пересекает продолжение этого диаметра в точке P и если плоскость e заменить семейством шаров K с непрерывно возрастающим радиусом, касающихся плоскости e в точке P, то можно убедиться, что точки подобия шаров k и K стремятся к точкам (ke) и $(ke)'$. Наконец для двух плоскостей e и f, пересекающихся по прямой g (черт. 151), сле-

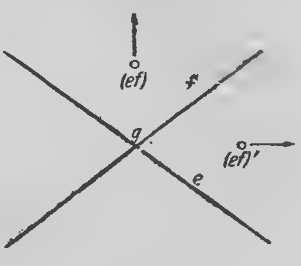


Черт. 149.



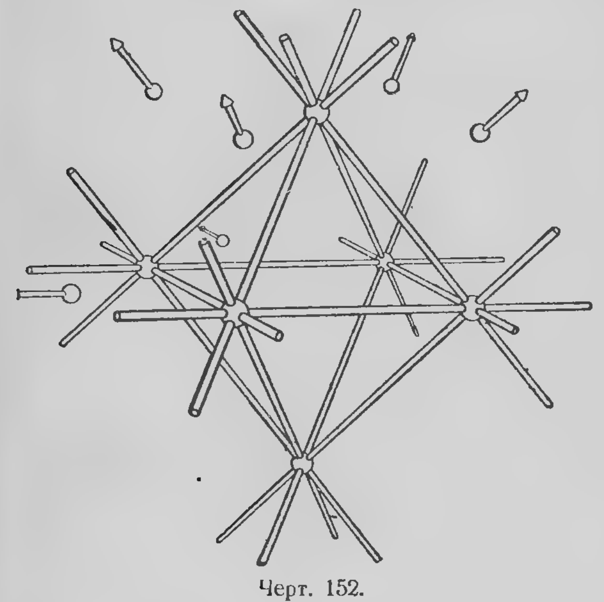
Черт. 150.

дует считать точками подобия бесконечно удаленные точки, расположенные в направлениях, перпендикулярных к прямой g и делящих пополам углы, образованные обеими плоскостями. Это определение также можно оправдать при помощи предельного перехода, если рассматривать прямую g как круг, получающийся в пересечении двух шаров с непрерывно возрастающими до бесконечности радиусами (однако остающихся все время попарно конгруэнтными), касающихся плоскостей e и f в постоянной точке прямой g.



Черт. 151.

При помощи этих определений можно представить конфигурацию Рейе в рассмотренном выше виде, так же и как систему точек подобия. Опишем из центров передней и задней граней куба (черт. 145) шары 3 и 4 с радиусами одинаковой величины, причем радиусы выберем так, чтобы каждый шар проходил через четыре вершины соответствующей грани. Перпендикулярно диагоналям этих граней на произвольном расстоянии проведем плоскости 1 и 2. Тогда точки конфигурации окажутся точками подобия плоскостей 1, 2 и шаров 3 и 4 в расположении, аналогичном изображенному на черт. 148.


Черт. 152.

Напрашивается мысль положить в основу вместо этого вырожденного случая четыре шара одинакового радиуса, центры которых образуют правильный тетраэдр. Тогда внешние точки подобия должны совпасть с бесконечно удаленными точками шести ребер тетраэдра, и следовательно, бесконечно удаленная плоскость принадлежит этой конфигурации и соответствует плоскости e_a в нашем обозначении. Внутренними точками подобия служат середины ребер тетраэдра. Эти шесть точек образуют вершины правильного октаэдра (черт. 152). Боковые грани его всегда являются плоскостями конфигурации; именно, это суть грани тетраэдра I, II, III, IV и плоскости, обозначенные в нашей схеме буквами e_1, e_2, e_3, e_4. Недостающие еще три плоскости суть три плоскости симметрии октаэдра. Прямыми конфигурации являются четыре бесконечно удаленных прямых

граней тетраэдра (внешние оси подобия) и двенадцать ребер октаэдра (внутренние оси подобия).

Мы уже указывали в первой главе на родство между кубом и октаэдром. В соответствии со сказанным в § 19 мы можем теперь сказать, что куб и октаэдр двойственны друг другу. Далее, мы можем обобщить это и показать, что точки и плоскости черт. 152 двойственно соответствуют плоскостям и точкам черт. 145; вершины и грани куба соответствуют граням и вершинам октаэдра, центр куба и шесть инцидентных с ним плоскостей соответствуют бесконечно удаленной плоскости и шести инцидентным с ней точкам октаэдра, три бесконечно удаленных точки куба соответствуют трем плоскостям симметрии октаэдра [1]). Таким образом доказано, что конфигурация Рейе двойственно инвариантна. Оказывается, что именно при двойственном соответствии между кубом и октаэдром плоскости и точки одной конфигурации Рейе отображаются на точки и плоскости другой, совершенно иначе расположенной конфигурации Рейе; однако в смысле проективной геометрии следует рассматривать все конфигурации Рейе как тождественные [2]).

Теперь мы покажем на конфигурации Рейе еще другое, важное свойство симметрии, с которым мы познакомились при рассмотрении плоских конфигураций. Именно мы докажем, что эта конфигурация правильна. Из сказанного до сих пор отнюдь нельзя еще вывести такого заключения, так как плоскости по отношению к системе точек подобия распадаются на четыре различных класса, а при осуществлении конфигурации посредством куба и октаэдра как точки, так и плоскости играют разную роль. В следующем параграфе мы приведем такой вывод конфигурации Рейе, при котором станет очевидным равноправие всех элементов. Для этой цели нам придется ближе ознакомиться с правильными телами трех- и четырехмерного пространства. Подобно тому как можно проектировать тела на плоскость, точно так же образы четырехмерного пространства можно проектировать на трехмерное пространство, и при соответствующем способе проектирования один из этих образов дает как проекцию конфигурацию Рейе.

23. Правильные тела и ячейки и их проекции. В первой главе мы сопоставляли пять правильных тел трехмерного пространства. Среди этих тел тетраэдр занимает особое место, так как он двойственен самому себе, между тем как остальные четыре тела попарно двойственны друг другу: октаэдр соответствует кубу, а додекаэдр — икосаэдру. Быть может, с этой особенностью тетраэдра связано и другое явление, которое отличает это тело от четырех других. Именно эти четыре тела можно назвать «центрально симметричными», потому что в этих телах вершины попарно между собой, ребра между собой и грани между собой расположены симметрично по отношению к центру; например, если соединить вершину

---

[1]) Такое соответствие получается посредством полярного преобразования относительно вписанного в куб шара.

[2]) Проективное обобщение октаэдра можно получить, если исходить из какой-нибудь проективной системы координат в пространстве. Единичные точки шести осей координат, так же как и точки пересечения координат единичной плоскостью, всегда являются точками конфигурации Рейе.

куба с его центром, то прямая, соединяющая их, пересечет куб в другой вершине. Напротив, тетраэдр не является центрально симметричным телом: прямая, соединяющая вершину его с центром, пересекает тетраэдр вторично в середине боковой грани.

Рассмотрением, подобным тем, которые мы привели в первой главе, можно доказать, что и в четырехмерном пространстве также возможно лишь конечное число правильных тел, именно шесть [1]). В образы четырехмерного пространства, естественно, помимо вершин, ребер и граней в качестве ограничивающих элементов входят также и куски пространства. Как для трехмерного пространства мы выставляли требование, чтобы поверхности, ограничивающие тело, представляли правильные многоугольники, так мы должны потребовать для четырехмерного пространства, чтобы области пространства, ограничивающие четырехмерный образ, являлись правильными многогранниками. Мы будем называть подобные образы «ячейками», причем если эти образы ограничены n многогранниками, то n-ячейками. В нижеследующей таблице мы приводим важнейшие данные о правильных ячейках четырехмерного пространства.

ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

	Число и вид ограничивающих многогранников	Число вершин	Двойственность
5-ячейка	5 тетраэдров	5	Двойственна самой себе
8 »	8 кубов	16	Двойственны друг другу
16 »	16 тетраэдров	8	
24 »	24 октаэдра	24	Двойственна самой себе
120 »	120 додекаэдров	600	Двойственны друг другу
600 »	600 тетраэдров	120	

Соотношения двойственности, указанные в последних строчках, вытекают непосредственно из рассмотрения таблицы, а именно: в четырехмерном пространстве точки двойственны пространствам, тогда как прямые двойственны плоскостям.

Из таблицы мы видим, что тетраэдр соответствует 5-ячейке. Далее, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр соответствуют 8-, 16-, 120- и 600-ячейке. 24-ячейка занимает особое место. Именно, она не только двойственна самой себе, но кроме того центрально симметрична, между тем как другая ячейка, двойственная самой себе, 5-ячейка, подобно соответствующему ей правильному тетраэдру трехмерного пространства не обладает центральной симметрией.

Подобные же исследования были проведены и для пространств более высокого числа измерений. Однако в этих случаях обнаруживается большая простота и закономерность, так как во всех этих пространствах возможны только три правильных тела. Важнейшие данные мы опять сопоставляем в виде таблицы.

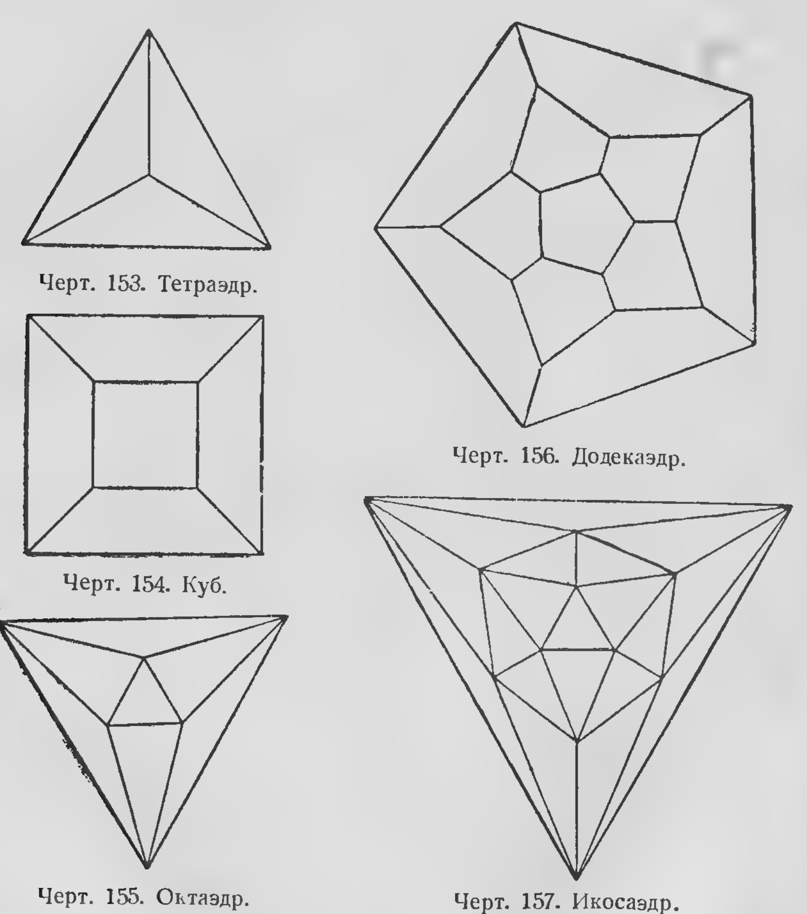
В трехмерном пространстве этим трем видам ячеек соответствуют

[1]) См., например, H. de Vrie, Die vierte Dimension, Leipzig und Berlin 1926.

n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

	Число и вид ограничивающих ячеек $(n-1)$ измерений		Число вершин	Двойственность
$(n+1)$-ячейка . .	$n+1$	n-ячеек	$n+1$	Двойственна самой себе
$2n$-ячейка	$2n$	$(2n-2)$-ячеек	2^n	Двойственны друг другу
2^n-ячейка	2^n	n-ячеек	$2n$	

тетраэдр, куб и октаэдр ($n+1=4$, $2n=6$, $2^n=8$), в четырехмерном пространстве 5-, 8- и 16-ячейка. Таким образом додекаэдр и икосаэдр, а также 24-, 120- и 600-ячейка не имеют аналогов в пространствах более высокого числа измерений.



Черт. 153. Тетраэдр.

Черт. 154. Куб.

Черт. 155. Октаэдр.

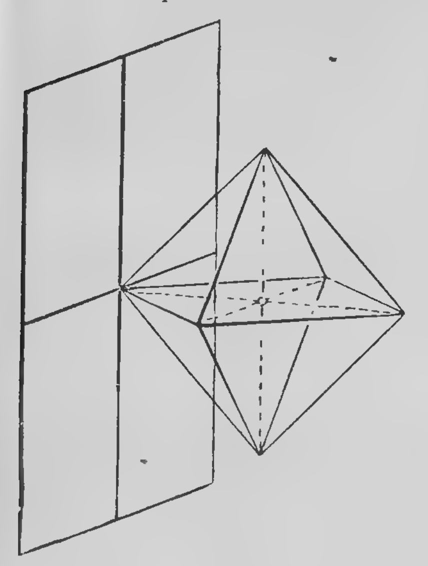
Черт. 156. Додекаэдр.

Черт. 157. Икосаэдр.

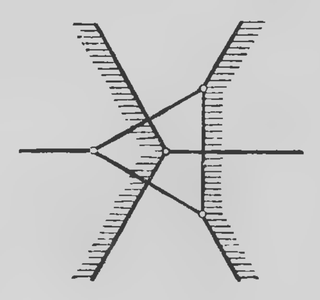
Теперь рассмотрим проекции правильных тел на пространство с числом измерений, меньшим на единицу. Начнем с проекций правильных многогранников трехмерного пространства на плоскость. В зависимости от

выбора центра проекции и плоскости проекции, естественно, эти проекции выглядят весьма различно. На черт. 95—99 (стр. 87) мы выбрали параллельную проекцию, т. е. центр проекции поместили в бесконечности. Такой способ проектирования имеет то преимущество, что параллельные прямые остаются параллельными. Однако он имеет тот недостаток, что проэкции граней частично перекрывают друг друга. Этот недостаток можно устранить, если передвинуть центр проекции очень близко к одной из граней. Ради симметрии расположим его на перпендикуляре, восставленном в середине одной из граней, и эту грань примем за плоскость про кции. Тогда для пяти правильных тел получатся проекции, изображенные на черт. 153—157. Такую же картину мы увидели бы, если бы удалили одну из граней многогранника и в образовавшуюся дыру рассматривали внутренность многогранника.

Если мы расположим центр проекции на самой границе тела, то боковые грани, проходящие через него, будут проектироваться в виде прямых, а потому проекция получится очень асимметричной.



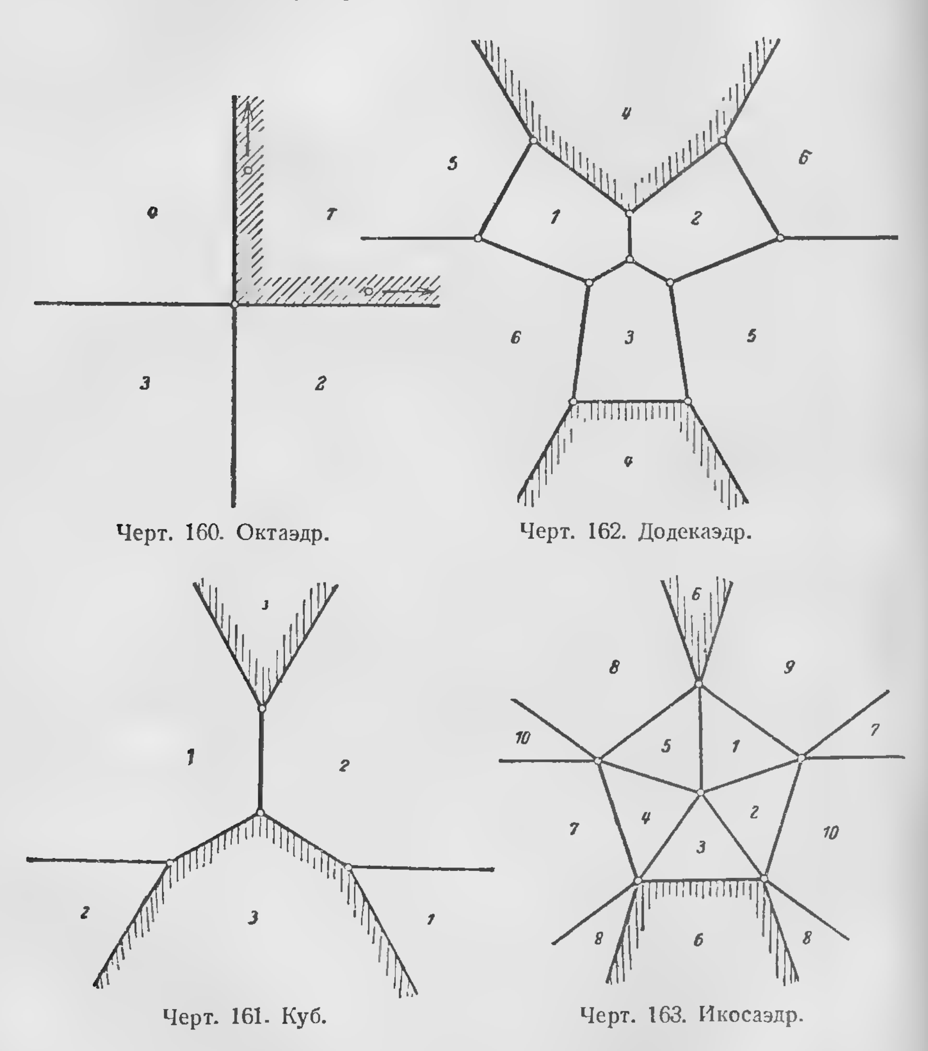
Черт. 158.



Черт. 159. Тетраэдр.

Если теперь мы перенесем центр проекции внутрь тела, то обнаружим существенное изменение изображения, а именно: проекция будет простираться в бесконечность, как бы мы ни выбирали плоскость проекции. В самом деле, всякая плоскость, проходящая через центр проекции, пересекает многогранник. Это, в частности, имеет место и для проходящей через центр проекции плоскости, параллельной плоскости проекций, которая и дает бесконечно удаленные точки проекции (стр. 106). Тем не менее такой способ проектирования приводит к интересному геометрическому явлению, причем это обнаруживается тогда, когда мы расположим центр проекции в центре многогранника. В этом и только в этом случае получается симметрическое распределение проектирующих лучей в пучки. Мы можем рассматривать пучок лучей, как уже было упомянуто на стр. 106, как модель проективной плоскости, если будем называть прямые пучка точками, а плоскости пучка — прямыми. Таким образом правильные тела приводят к правильным разбиениям проектив-

ной плоскости. Эти разбиения будут однократно покрывать проективную плоскость только в случае центрально симметрических тел; у тетраэдра мы получим для каждого проектирующего луча две различных проекции, в зависимости от того, какую точку возьмем из двух точек пересечения его с телом; поэтому проективная плоскость дважды перекрывается.



Черт. 160. Октаэдр.

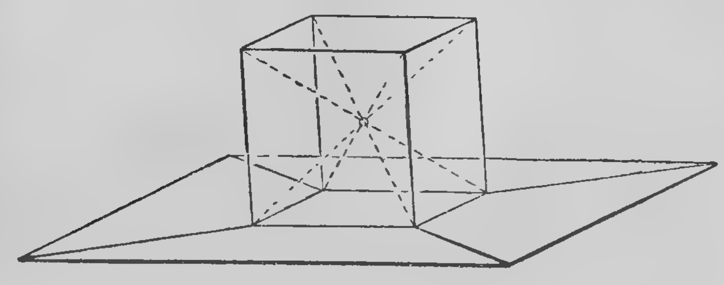
Черт. 162. Додекаэдр.

Черт. 161. Куб.

Черт. 163. Икосаэдр.

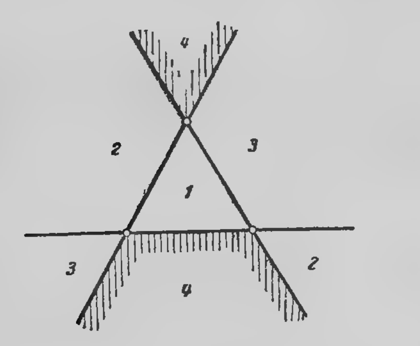
Напротив, у всех других тел каждая пара диаметрально противоположных элементов дает один элемент разбиения проективной плоскости. Если мы пересечем пучок лучей некоторой плоскостью, т. е. будем рассматривать проекцию в собственном смысле, то не сможем получить правильной симметрии. В частности, проекция будет особенно проста, если мы изберем плоскость проекции, проходящую через вершину и перпендикулярную в вершине к прямой, соединяющей эту вершину с центром тела (черт. 158

для октаэдра). Пять получающихся таким способом фигур изображены на черт. 159—163. На каждом чертеже область, простирающаяся в бесконечность, выделена штриховкой. В случае тетраэдра плоскость проекции покрывается дважды. На всех остальных фигурах каждый многоугольник плоскости представляет две противоположные грани тела.

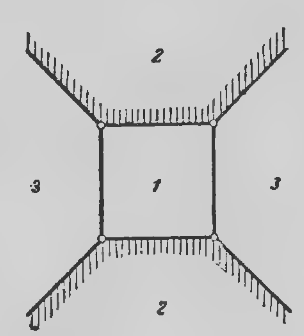


Черт. 164.

Другой ряд простых фигур мы получим, если выберем для симметричных тел (черт. 164 для куба) за плоскость проекции одну из боковых граней (в случае тетраэдра при этом мы не получим новой фигуры). На черт. 165—168 изображены эти фигуры [1]).



Черт. 165. Октаэдр.

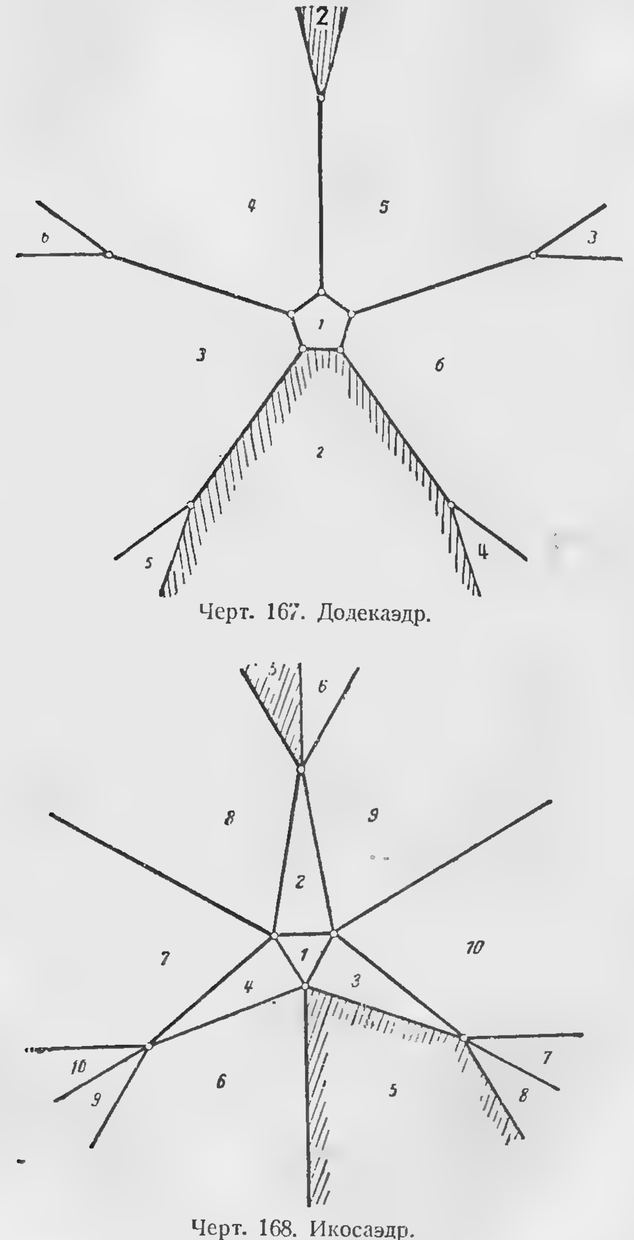


Черт. 166. Куб.

Мы можем избрать аналогичные способы проектирования, для того чтобы отобразить ячейки четырехмерного пространства в виде тел трехмерного пространства. При этом параллельная проекция оказывается неприменимой, ибо тогда ограничивающие ячейку многогранники изобразятся многогранниками трехмерного пространства, которые будут частично перекрывать друг друга, частично проникать друг в друга. Напротив, мы получим удобные для обозрения изображения, если воспользуемся способом, который мы применяли для получения черт. 153—157. Ограничивающие

[1]) Проекция октаэдра в этом случае соответствует разбиению плоскости на четыре треугольника проективной системой координат.

ячейку многогранники тогда изображается системой многогранников, из которых один занимает исключительное положение и заполняется дру-



Черт. 167. Додекаэдр.

Черт. 168. Икосаэдр.

гими без промежутков и двойных покрытий. Если мы затем будем проектировать эти модели на плоскость, то получим проекции, которые

изображены на черт. 169—172. На черт. 172 при некотором усилии можно обнаружить, что большой октаэдр заполнен 23 меньшими октаэдрами (четырех видов), так что всего здесь имеется 24 тела. Для 120- и 600-ячейки получающиеся фигуры становятся совершенно необозримыми.

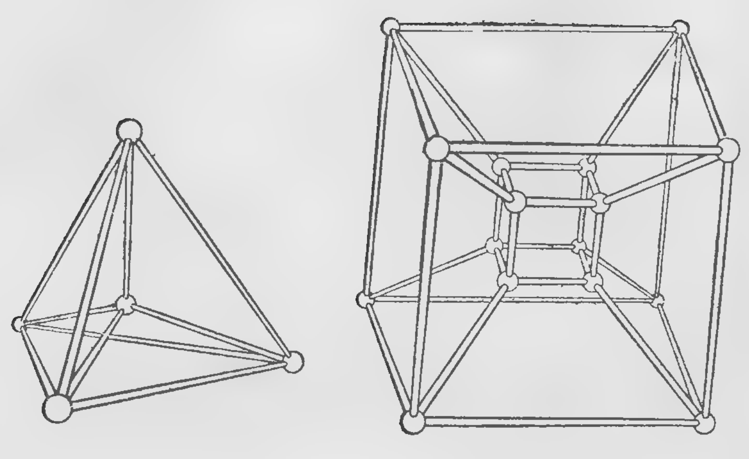
Если расположить центр проекции в центре ячейки, то мы должны получить правильное разбиение проективного пространства. Для проективного пространства мы не можем получить такой же симметричной модели, какую дает пучок проектирующих лучей для проективной плоскости, так как в этом случае нам пришлось бы рассматривать некоторый четырехмерный образ. Поэтому нам придется выбрать определенное трехмерное пространство в качестве пространства проекции, причем симметрия частично исчезнет. Для того чтобы хотя бы частично сохранить симметрию, мы расположим пространство проекции аналогично тому, как мы только что располагали плоскость проекции для случая пространства трех измерений; при этом пространство проекции либо должно совпасть с одним из ограничивающих пространств, соответственно изображенному на черт. 164 расположению, либо оно должно проходить через вершину клетки и иметь расположение, аналогичное расположению плоскости проекции на черт. 158.

В первом случае один из граничных многогранников должен оказаться неискаженным, так как он лежит в самом пространстве проекции; во втором случае имеет место центральная симметрия по отношению к избранной вершине, которая служит проекцией самой себя. Мы здесь рассмотрим прежде всего по два изображения 16- и 8-ячейки (черт. 173 и 174)[1]). При этом пространство разобьется на восемь или, соответственно, на четыре части, причем каждой части соответствуют два диаметрально расположенных граничных тела ячейки. На черт. 173а части пространства, простирающиеся в бесконечность, имеют двоякий вид. Четыре из этих областей имеют боковые грани (например 1, 3, 4), целиком расположенные в конечной области пространства, простираясь от которых в бесконечность они достигают противоположной вершины (например 2). Три других области, напротив, имеют два расположенных друг против друга конечных ребра (например 1, 2 и 3, 4), между тем как все боковые грани простираются в бесконечность. На черт. 173б бесконечно удаленная плоскость сама является граничной плоскостью. Мы видим, что 16-ячейка приводит к знакомым нам разбиениям, а именно: к разделению пространства на октанты при помощи проективной или декартовой системы координат. В случае 8-ячейки, как видно на черт. 174а, три части пространства, удаляющиеся в бесконечность, имеют все один и тот же вид. На черт. 174б стрелками изображены ребра той области, которая соответствует конечному кубу черт. 174а. К ребрам этой области принадлежат также конечные ребра, выходящие из точки 1, кроме ребра 1,6.

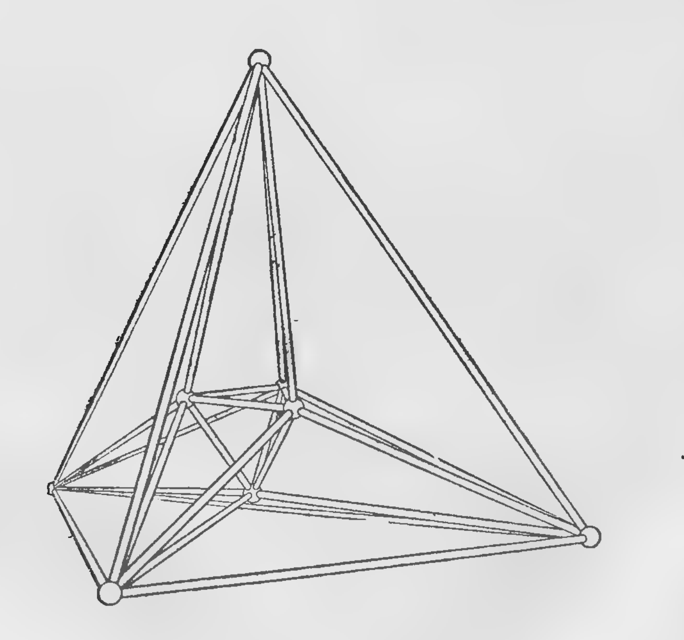
На черт. 175 и 176 те же самые два способа проектирования применены к 24-ячейке. Мы получаем таким образом разделение пространства на двенадцать октаэдров, из которых все простираются в бесконечность, не считая среднего, как показано на черт. 175. Но в этих фигурах

---

1) Для 5-ячейки этот способ изображения непригоден, так как она не обладает центральной симметрией.

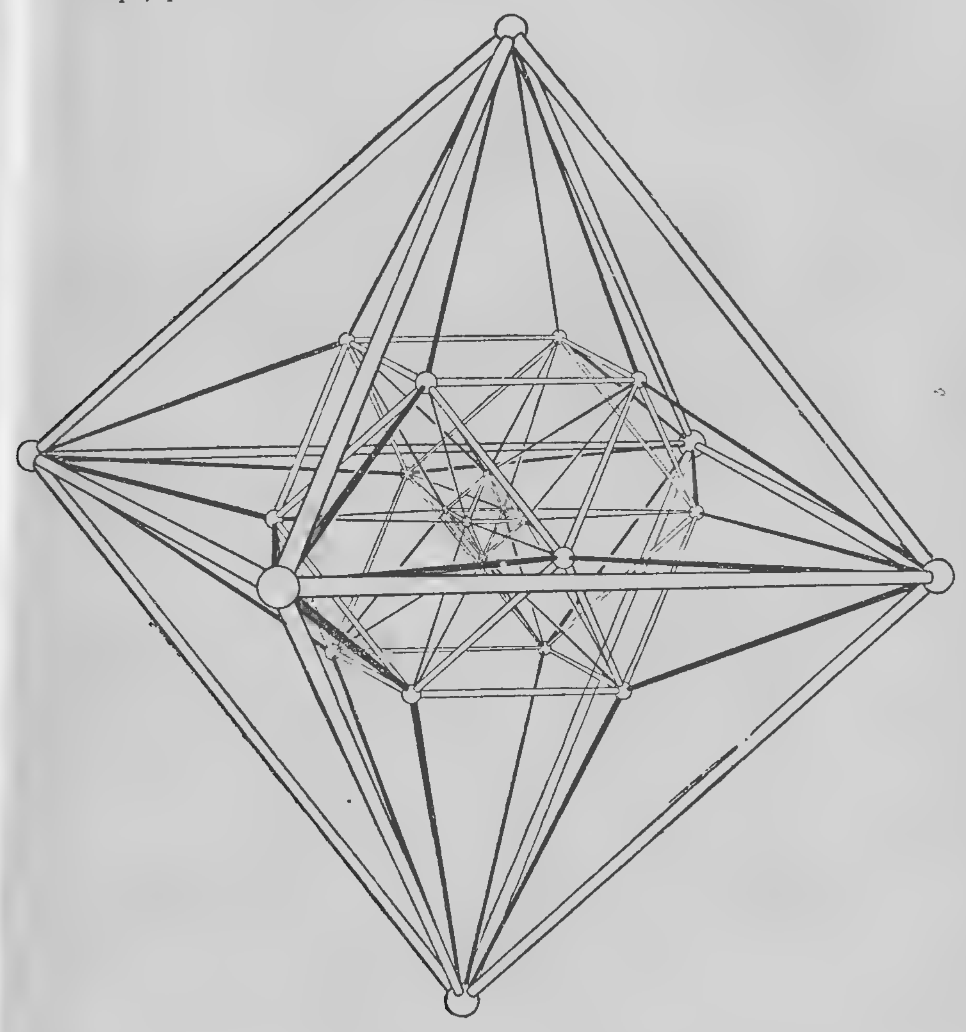


Черт. 169. 5-ячейка. Черт. 170. 8-ячейка.



Черн. 171. 16-ячейка.

мы узнаем оба симметрических расположения конфигурации Рейе, которую мы рассмотрели в предшествующем параграфе[1]). Мы видим на октаэдре, расположенном в конечной области, что плоскости конфигура-

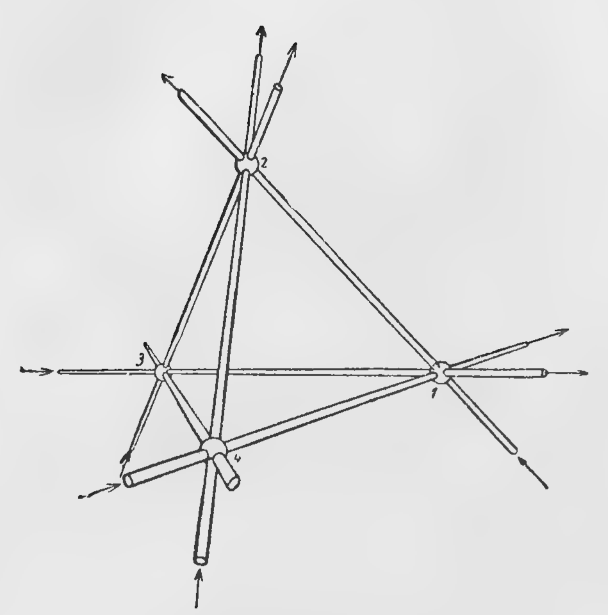


Черт. 172. 24-ячейка.

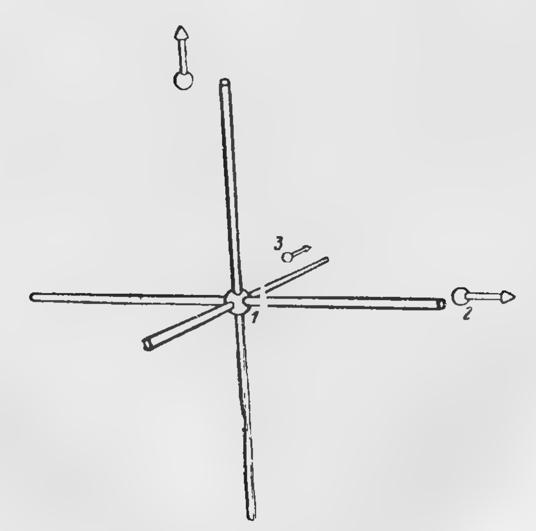
ции образуют в одно и то же время грани и являются плоскостями симметрии двенадцати октаэдров. Более детальное рассмотрение позволяет

---

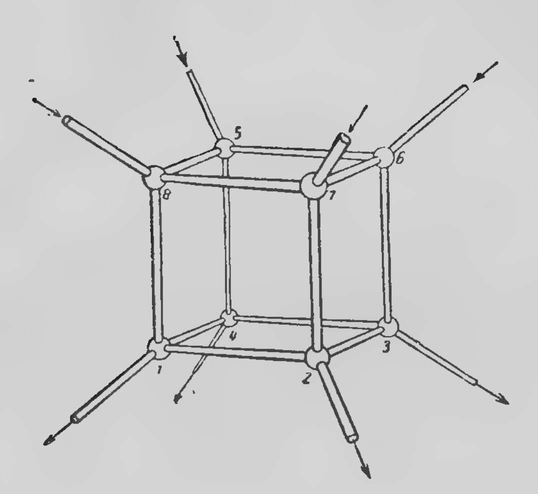
1) Там мы получали одну фигуру из другой при помощи полярного преобразования относительно шара. Теперь мы узнаем в них проекции одного и того же четырехмерного образа, которые могут быть переведены одна в другую при помощи перемещения пространства проекций.



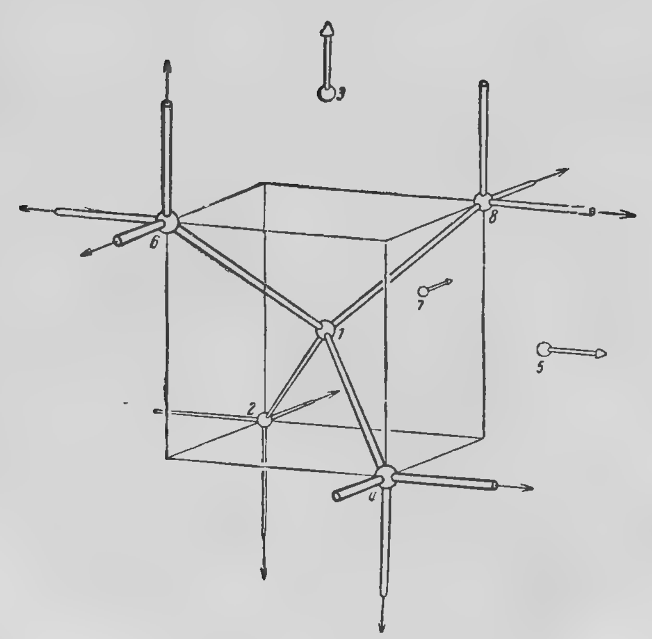
Черт. 173а. 16-ячейка.



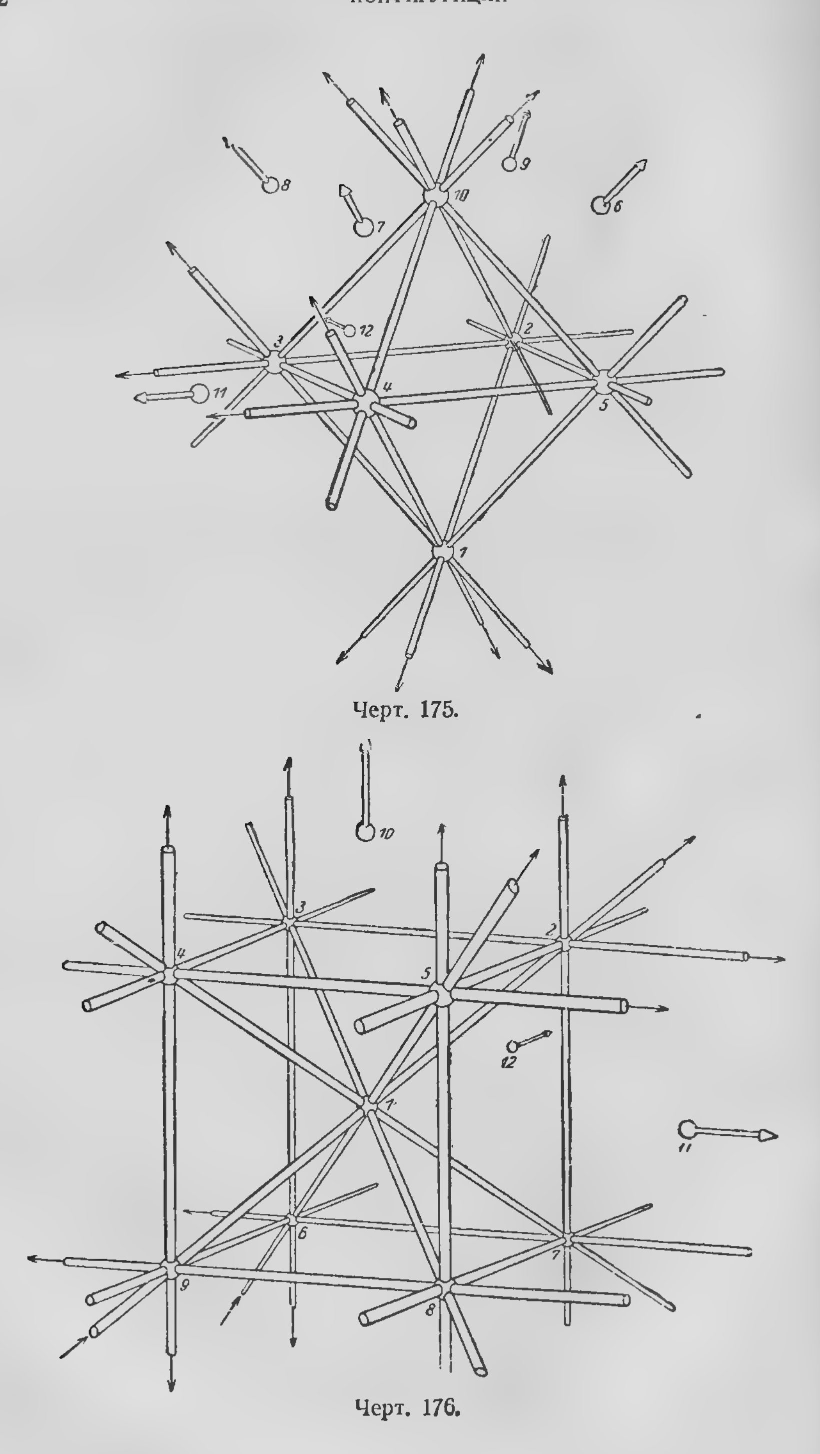
Черт. 173б. 16-ячейка.



Черт. 174а. 8-ячейка.



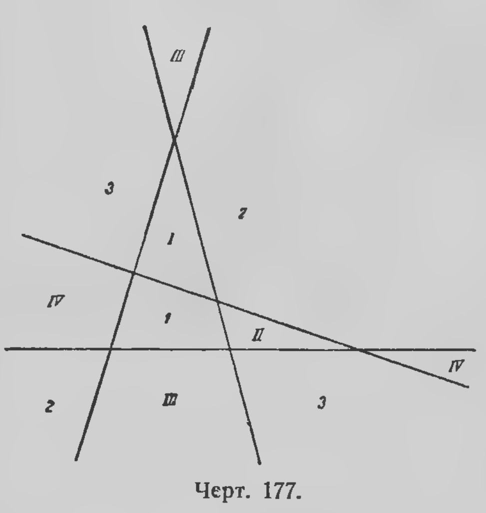
Черт. 174б. 8-ячейка.



Черт. 175.

Черт. 176.

понять истинное основание этого; именно, полный четырехсторонник разбивает проективную плоскость на три четырехугольника и четыре треугольника (черт. 177, четырехугольники 1, 2, 3, треугольники *I*, *II*, *III*, *IV*). В конфигурации Рейе каждая плоскость разбивается таким же образом прямыми конфигурации; а так как гранями октаэдра являются треугольники, между тем как плоскости симметрии пересекаются с октаэдром по четырехугольникам, то отсюда следует, что всякая плоскость конфигурации является плоскостью симметрии для трех октаэдров и общей гранью 2·4 октаэдров и не пересекает одного из двенадцати октаэдров; так, например, на черт. 175 бесконечно удаленная плоскость есть плоскость конфигурации, она не пересекает одного октаэдра, именно того, который расположен в конечной области [1]).



Черт. 177.

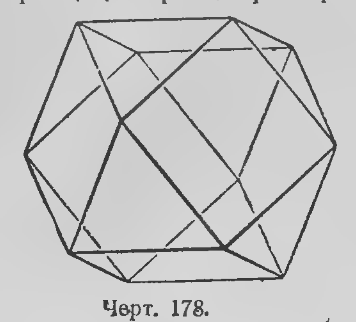
Черт. 176 проще, чем черт. 175, поскольку на нем имеется только два вида октаэдров (шесть октаэдров имеют такой же вид, как 1, 2, 3, 4, 5, 10, а шесть остальных конгруэнтны с октаэдром 2, 5, 6, 9, 10, 11), между тем как на черт. 175 имеются октаэдры трех видов. Именно один из них правильный октаэдр, а из остальных три имеют плоскостью симметрии бесконечно удаленную плоскость (например 1, 6, 7, 8, 9, 10), а для восьми октаэдров эта плоскость служит гранью (например 3, 4, 7, 8, 10, 11).

Из такого построения конфигурации непосредственно следует утверждение, приведенное в конце предыдущего параграфа, а именно, что *конфигурация Рейе правильна*.

Вышеприведенное рассмотрение наводит на мысль о том, чтобы проектировать n-мерные правильные образы на пространство с возможно меньшим числом измерений, т. е. на прямую. Мы рассмотрим вопрос о том,

---

[1]) Как октаэдр имеет три плоскости симметрии, проходящие через центр и пересекающие его по квадратам, так 24-ячейка имеет 12 трехмерных пространств симметрии. Они проходят через центр этой ячейки и пересекают ее каждая по некоторому кубооктаэдру (черт. 178; один из кубооктаэдров выделен также на черт. 172). В рассмотренной нами проекции эти пространства симметрии, как и всякие пространства, проходящие через центр проекций, должны преобразоваться в плоскости конфигурации Рейе. В самом деле, три четырехугольника и четыре треугольника соответствуют диаметральным парам из 2+3 квадратов и 2+4 равносторонних треугольников кубооктаэдра.


Черт. 178.

как n-мерный куб проектируется на одну из его главных диагоналей, если применить ортогональную проекцию. Концы A, B такой диагонали будут служить изображениями самих себя. Точки, изображающие другие вершины куба, мы обозначим по порядку через $C_1, C_2, \ldots$ в порядке их расположения на прямой AB, начиная от точки A. Но из точки A выходят n ребер куба и все они образуют с прямой AB равные углы. Поэтому все их концы должны иметь одну точку C_1 в качестве проекции на прямой AB. Далее, каждое из ребер куба параллельно одному из ребер, выходящих из точки A, а потому расстояние между последовательными точками C_k, C_{k+1} всегда равно AC_1, т. е. постоянно. Отсюда следует, что главная диагональ разделится на равные отрезки. Можно доказать, что получится как раз n отрезков и что точка C_k для всякого числа k, лежащего между 1 и $n-1$, служит изображением $\binom{n}{k}$ вершин куба, где $\binom{n}{k}$ — известный символ биномиального коэфициента. При этом точка C_k служит изображением всех тех и только тех вершин, которые могут быть соединены с точкой A k и, не менее, чем k, ребрами куба. Можно сосчитать, что таких вершин имеется в точности $\binom{n}{k}$. В случае квадрата и обычного куба изложенные факты можно легко уяснить.

24. Исчислительные методы геометрии. Последняя пространственная конфигурация, которую мы рассмотрим, двойной шестисторонник Шлефли (Schläfli), приводит к интересному геометрическому методу особого рода, который называется исчислительной геометрией. Мы прежде всего изложим этот метод, чтобы потом не прерывать исследования двойного шестисторонника; кроме того этот метод представляет сам по себе большой интерес.

На плоскости имеется бесконечное множество прямых и бесконечное множество кругов. Для того чтобы охарактеризовать множество всех прямых плоскости, выберем неподвижную систему декартовых координат на плоскости. Тогда, вообще говоря, прямая определяется теми двумя отрезками, которые она отсекает на осях координат. Таким образом мы можем всегда, — за исключением одного случая, который мы сейчас укажем, — задавать прямую аналитически двумя числами. Прямые, параллельные одной из осей, мы можем также определять этим способом, если один из отрезков, отсекаемых на осях, зададим как отрезок бесконечной длины. Напротив, все прямые, проходящие через начало координат, не могут быть определены таким способом; все эти прямые дают одни и те же числа, именно: нули для обоих отрезков.

Говорят, что прямые, не проходящие через начало, образуют семейство с двумя параметрами, выражая этим то обстоятельство, что каждая прямая семейства определяется двумя числами (параметрами семейства) и что непрерывному изменению параметров соответствует непрерывное изменение прямых. Прямые, проходящие через начало, в соответствии с таким определением образуют семейство с одним параметром, так как их можно определить при помощи углов, которые они образуют с одной из осей. Принимают, что многообразие с двумя параметрами, грубо говоря, не увеличится значительно, если к нему добавить еще семейство с одним параметром, которое в него непрерывно включено. В этом смысле совокупность всех прямых плоскости точно так же называется семейством

с двумя параметрами. Мы вскоре убедимся в целесообразности подобного способа рассмотрения.

Мы можем определять прямые на плоскости также и многими другими способами, например при помощи угла, который прямая образует с определенной прямой, и точки, через которую она проходит. Так как для определения точки на плоскости необходимы две координаты, то если мы таким способом будем определять прямые, нам потребуется всего три параметра. Но мы можем выбирать определяющие точки на заданной прямой, а точки прямой, очевидно, образуют семейство с одним параметром. Аналогичное явление мы заметим, если будем определять прямую двумя лежащими на ней точками. Тогда нам потребуется четыре параметра, семейство же пар точек с двумя параметрами определяет одну и ту же прямую. Чтобы получить истинное число параметров, нам нужно таким образом в последнем примере брать два параметра, а в предыдущем примере — один параметр, и таким образом, так же как и при первом способе задания прямой, мы находим, что прямые на плоскости образуют семейство с двумя параметрами. Этот способ, только намеченный здесь, можно аналитически уточнить, причем можно доказать, что число параметров некоторого семейства геометрических образов не зависит от того, каким образом мы будем выбирать параметры. Подобные рассуждения коротко записываются при помощи символа ∞. В этом смысле говорят, что на плоскости имеется ∞^2 прямых, на прямой ∞^1 точек и ∞^2 пар точек. Такое вычисление имеет аналогию с делением степеней чисел: мы можем разделить «число» ∞^4 всех пар точек плоскости на «число» ∞^2 пар точек прямой, чтобы получить истинное «число» ∞^2 всех прямых на плоскости.

Мы применим этот способ для того, чтобы определить множество всех кругов плоскости. Круг определяется своим центром и радиусом, таким образом для определения круга необходимо задать три числа, и обратно, каждому кругу соответствует одна единственная подобная тройка чисел. Таким образом на плоскости имеется всего ∞^3 кругов. Так как семейство всех прямых имеет только два параметра и так как всякую прямую можно рассматривать как предельный случай окружности, то семейство всех окружностей и прямых на плоскости точно так же имеет три параметра. Этому соответствует тот факт, что через всякие три точки плоскости всегда можно провести либо окружность, либо прямую. В самом деле, на плоскости имеется ∞^6 троек точек и множество из ∞^3 троек точек определяет одну и ту же кривую. Аналогично можно показать, что в семействе плоских кривых с n параметрами всегда имеется кривая, проходящая через n совершенно произвольно выбранных точек плоскости, но через $n+1$ произвольных точек плоскости вообще не проходит ни одна кривая семейства. Однако эта теорема справедлива только в том случае, если включить в семейство также и все предельные случаи; так, между окружностями и тройками точек на плоскости возможно однозначное соответствие только в том случае, если включить в число окружностей также и прямые как предельный случай окружности. Строгая формулировка всех этих высказываний возможна только при помощи аналитических и алгебраических средств, причем, в частности, должны быть рассмотрены также и мнимые образы.

Теперь перейдем к подсчету различных конических сечений. Эллипс определяется двумя своими фокусами (четырьмя параметрами) и постоянной суммой расстояния от этих точек, т. е. всего пятью параметрами, и всякому эллипсу соответствует только одна единственная система таких пяти данных. Следовательно, на плоскости имеется ∞^5 эллипсов. Точно так же можно доказать, что на плоскости имеется ∞^5 гипербол. Эллипсы можно определить также двумя осями, центром и направлением большой оси, что опять-таки дает пять параметров и согласуется с общей теорией. Отсюда следует, что семейство всех парабол на плоскости имеет четыре параметра, так как согласно построению, проведенному на стр. 11, параболы получаются как предельный случай эллипса, причем всегда семейство эллипсов с одним параметром определяет одну и ту же параболу и каждый эллипс входит лишь в конечное число, а именно: в два подобных семейства.

Если задать две оси эллипса равными, то получится окружность. Отсюда напрашивается ложный вывод. В самом деле, если мы установим, что обе оси должны быть одинаковой длины, то остаются еще четыре числа для задания кривой. Таким образом можно было бы думать, что на плоскости имеется ∞^5 окружностей, а не ∞^3, как мы только что определили. Противоречие разрешается тем, что при одинаковой длине осей становится излишним также и задание направлений осей, так как любую пару перпендикулярных диаметров окружности можно рассматривать как предельный случай осей эллипса.

Из вышеизложенного нельзя заключить, что через пять произвольных точек плоскости всегда можно провести эллипс. Такое заключение было бы как-будто правильным, если к эллипсам добавить также параболы и окружности в качестве предельных случаев. Оказывается, однако, что нужно добавить еще и гиперболы. Совокупность всех конических сечений на плоскости, т. е. всех гипербол, парабол, эллипсов, окружностей и пар прямых и прямых (сосчитанных дважды), образует в смысле исчислительной геометрии одно единственное семейство. Согласно вышесказанному это семейство должно иметь пять параметров, так как каждое из конических сечений принадлежит к определенному семейству с пятью или меньшим числом параметров. Для совокупности всех конических сечений действительно имеет место теорема, что через пять произвольных точек плоскости проходит одно коническое сечение. Более детальное рассмотрение, которое, однако, уже не относится по своей природе к исчислительной геометрии, показывает, что коническое сечение определяется однозначно, если никакие четыре из заданных точек не лежат на одной прямой. Если имеет место этот исключительный случай, то, очевидно, определение будет многозначным; в самом деле, через четыре точки прямой g и какую-нибудь пятую точку P можно провести ∞^1 пар прямых g, h, т. е. ∞^1 конических сечений специального вида, если выбрать в качестве прямой h произвольную прямую, проходящую через точку P. Если точка P также лежит на прямой g, то имеется даже ∞^2 пар прямых, ибо в этом случае прямую h можно выбрать совершенно произвольно.

Применим теперь исчислительные методы к пространственным образам. Определяя плоскость тремя отрезками, отсекаемыми ею на пространственных осях координат, мы убеждаемся, что в пространстве имеется всего ∞^3

плоскостей; ведь плоскости, проходящие через начало координат, которые одни только составляют исключение, образуют семейство с двумя параметрами. Таким образом наше исчисление подтверждает элементарную теорему, что через три произвольные точки пространства проходит только одна плоскость; действительно в пространстве имеется ∞^9 троек точек, в плоскости ∞^6 троек, так что мы получаем «число» плоскостей ∞^3, разделив первое «число» на второе.

Определяя прямую двумя точками, мы находим, что в пространстве имеется ∞^4 прямых, так как в пространстве имеется ∞^6 пар точек, а на прямой ∞^2.

Шары мы можем определить, задавая центр и радиус. Отсюда следует, что в пространстве имеется ∞^4 шаров. Если добавить к этому семейству еще плоскости как предельный случай шаров, то наш подсчет подтвердит известный факт, что через четыре точки пространства всегда можно провести либо шар, либо плоскость. Так же как и в случае конических сечений, определение шара не всегда однозначно и в нашем случае будет однозначным тогда и только тогда, когда взятые четыре точки не лежат на одной окружности или на одной прямой. Аналогичное явление имеет место всегда. Если определено семейство поверхностей с n параметрами исчерпывающим образом (как, например, на плоскости семейство всех конических сечений определено исчерпывающим образом в противоположность семейству всех эллипсов), то через n точек пространства всегда проходит одна поверхность семейства. Однако эта поверхность не во всех случаях определяется однозначно n точками, а только тогда, когда взятые n точек находятся в «общем положении», т. е. когда между этими точками нет определенных геометрических соотношений, причем вид этих соотношений зависит от заданного семейства поверхностей.

Линейчатая поверхность второго порядка определяется тремя прямыми, не лежащими попарно в одной плоскости. В пространстве имеется $\infty^{4\cdot 3}=\infty^{12}$ троек прямых, но так как на линейчатой поверхности второго порядка всякая прямая принадлежит к одному семейству с одним параметром, то ∞^3 троек прямых определяют одну и ту же поверхность, и следовательно, всего имеется ∞^9 линейчатых поверхностей второго порядка.

Точно так же имеется всего ∞^9 трехосных эллипсоидов. В самом деле, мы получим все эллипсоиды, причем только по одному разу, если зададим центр (три параметра), длины осей (три параметра), направление большой оси (два параметра) и плоскости, перпендикулярной к этой оси, и проходящее через центр направление меньшей оси (один параметр).

Аналитическое рассмотрение показывает, что вообще имеется всего ∞^9 поверхностей второго порядка. Для этого семейства имеет место теорема, что через девять произвольных точек пространства всегда проходит одна поверхность. Для того чтобы это определение было однозначным, т. е. чтобы точки имели достаточно общее расположение для данного семейства, необходимо исключить тот случай, когда точки расположены на определенных пространственных кривых четвертого порядка, которые могут быть построены как пересечение двух поверхностей второго порядка: понятно, что задание произвольного числа точек, лежащих на подобной кривой, не определяет однозначно поверхности второго порядка.

Теперь мы покажем, что на всякой поверхности второго порядка лежит бесконечное множество прямых. Для этой цели нам нужно будет исхо-

дить из определенного факта, который следует непосредственно из аналитического определения поверхности второго порядка, именно, что прямая, имеющая три общие точки с подобной поверхностью, всегда целиком лежит на этой поверхности. Но, очевидно, на поверхности второго порядка (и на всякой другой произвольной поверхности) имеется ∞^6-троек точек. Если мы выберем теперь те тройки, которые лежат на одной и той же прямой, то исчислительная геометрия позволяет сделать заключение, что имеется всего ∞^4 таких троек, т. е. что два параметра отпадают. Отсюда следует, что необходимы два аналитических соотношения, чтобы выразить, что одна из точек лежит на прямой, проходящей через две другие точки.

Здесь имеет место общая теорема, что число параметров некоторого семейства может быть уменьшено на n, если ограничиться только теми элементами семейства, которые удовлетворяют n независимым соотношениям; независимыми называются n соотношений тогда, когда их нельзя заменить меньшим, чем n, числом соотношений. Соответственно этому на каждой поверхности второго порядка действительно должно существовать ∞^4 коллинеарных троек точек. Всякая прямая, содержащая такую тройку точек, по-предыдущему должна целиком лежать на поверхности. Но на прямой имеется ∞^3 таких троек точек. Следовательно, коллинеарные тройки точек поверхности второго порядка лежат на ∞^1 прямых, проходящих на поверхности. На эллипсоиде, эллиптическом параболоиде и двуполостном гиперболоиде эти прямые мнимы.

В заключение приведем еще несколько замечаний относительно поверхностей третьего порядка, так как эти поверхности тесно связаны со свойствами рассматриваемого ниже двойного шестисторонника Шлефли. Аналитически эти поверхности характеризуются тем, что они выражаются в декартовых координатах уравнениями третьей степени. Но общее уравнение третьей степени с тремя переменными содержит двадцать коэфициентов, которые определяются соответствующей поверхностью с точностью до общего множителя. Отсюда следует, что имеется всего ∞^{19} поверхностей третьего порядка и что через девятнадцать произвольных точек пространства всегда проходит такая поверхность. При этом следует добавить к числу поверхностей третьего порядка все случаи вырождения поверхностей. Например следует рассматривать поверхность второго порядка вместе с некоторой плоскостью как поверхность третьего порядка.

Прямая вообще имеет три общих точки с поверхностью третьего порядка, а прямая, имеющая с такой поверхностью четыре общих точки, должна лежать на этой поверхности целиком. Это можно легко заключить из того, что уравнение поверхности есть уравнение третьей степени.

Мы покажем теперь при помощи исчислительных методов, что на поверхности третьего порядка самого общего вида может лежать лишь конечное число прямых. На всякой поверхности имеется ∞^8 четверок точек. Для того чтобы такая четверка была коллинеарна, необходимы четыре условия, так как, для того чтобы третья и четвертая точки лежали на прямых, проходящих через первые две точки, необходимо по два условия. Поэтому на поверхности третьего порядка общего вида лежат ∞^4 коллинеарных четверок точек. Всякая прямая, содержащая

четыре точки поверхности, лежит целиком на поверхности и содержит ∞^4 других четверок. Поэтому, если бы на поверхности лежало бесконечное множество прямых, то поверхность должна была бы содержать более чем ∞^4 коллинеарных четверок точек.

Среди поверхностей третьего порядка также имеется много линейчатых поверхностей, на которых, следовательно, лежат ∞^5 или более коллинеарных четверок точек. Отсюда следует, что уравнение линейчатой поверхности третьего порядка должно обладать специальным свойством, а именно, это уравнение вместе с четырьмя условиями коллинеарности четверки точек должно заменяться системой из меньшего числа уравнений. Можно доказать, что такая редукция возможна лишь в том случае, если между двадцатью коэфициентами уравнения третьей степени имеет место соотношение специального вида. Таким образом на поверхности третьего порядка общего вида действительно может лежать лишь конечное число прямых [1]).

Аналогично можно подсчитать, что на поверхности порядка выше третьего вообще не лежит ни одной прямой.

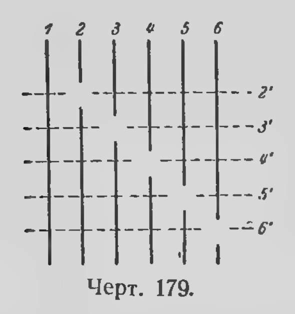
25. Двойной шестисторонник Шлефли. Прежде всего приведем несколько простых соображений относительно возможного расположения прямых в пространстве. Три прямые a, b, c, не расположенные попарно в одной плоскости, определяют гиперболоид H. Произвольная четвертая прямая d вообще пересекается с гиперболоидом в двух точках. Эта прямая может также касаться гиперболоида или лежать целиком на нем. В общем случае через каждую точку пересечения проходит одна прямая, лежащая на гиперболоиде и не принадлежащая к тому семейству, к которому принадлежат прямые a, b, c, следовательно, пересекающая эти прямые. Обратно, всякая прямая, пересекающая прямые a, b, c и d, должна лежать на гиперболоиде и проходить через точку пересечения гиперболоида с прямой d. Следовательно, вообще говоря, для четырех прямых имеются две и только две прямых, пересекающих эти четыре прямые. Если в нашем примере мы возьмем случай, когда прямая d является касательной к гиперболоиду, то имеется только одна, считаемая дважды прямая, инцидентная с прямыми a, b, c и d. Если, наоборот, имеется больше, чем две прямых, пересекающих прямые a, b, c, d, то прямая d должна целиком лежать на гиперболоиде. Таким образом в этом случае имеется бесконечное число прямых, пересекающих прямые a, b, c, d. Тогда говорят, что эти четыре прямые имеют гиперболоидальное расположение.

Теперь, для того чтобы построить двойной шестисторонник Шлефли, будем исходить из произвольной прямой 1 и проведем через эту прямую три прямых, не лежащих попарно в одной плоскости, и обозначим их по соображениям, которые выяснятся ниже, через $2', 3', 4'$ (черт. 179). Теперь проведем через прямую 1 новую прямую $5'$, которая должна иметь самое общее расположение по отношению к прямым $2', 3', 4'$. Тогда прямая $5'$ не будет лежать в одной плоскости с прямыми $2', 3', 4'$ и кроме прямой 1 имеется еще только одна другая прямая, пересекаю-

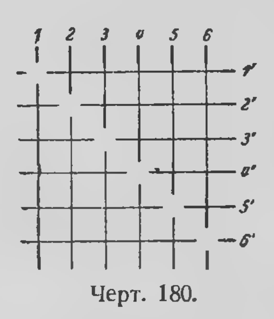
[1]) Так, например, ни через одну точку поверхности $xyz = 1$, лежащую в конечной части пространства, не проходит прямая, лежащая на поверхности.

щая прямые $2', 3', 4', 5'$. Обозначим эту прямую числом 6. Проведем теперь через прямую 1 последнюю прямую $6'$, не пересекающую прямых $6', 2', 3', 4', 5'$. Далее выберем прямую $6'$ так, чтобы четверки прямых $2', 3', 4', 6'$, $2', 3', 5', 6'$, $2', 4', 5', 6'$ и $3', 4', 5', 6'$ имели наиболее общее расположение. Тогда кроме прямой 1 имеется еще только одна прямая 5, пересекающая прямые $2', 3', 4', 6'$. Аналогично определим прямые 4, 3, 2 (например прямая 4 инцидентна с прямыми $2', 3', 5', 6'$ и отлична от прямой 1). Таким образом мы получим изображенную на черт. 179 схему инцидентностей. Легко усмотреть, что благодаря нашему выбору прямых $2', 3', 4', 5', 6'$ никаких других инцидентностей быть не может.

Рассмотрим теперь прямые 2, 3, 4, 5. Мы утверждаем, что эти четыре прямые не могут иметь гиперболоидального расположения. В самом деле, в противном случае каждая прямая, инцидентная с тремя из них, пересекалась бы и с четвертой, а это обстоятельство должно иметь место в нашей схеме только для четырех прямых $2', 3', 4', 5'$. Тогда также и последние четыре прямых имели бы гиперболоидальное расположение,



Черт. 179.

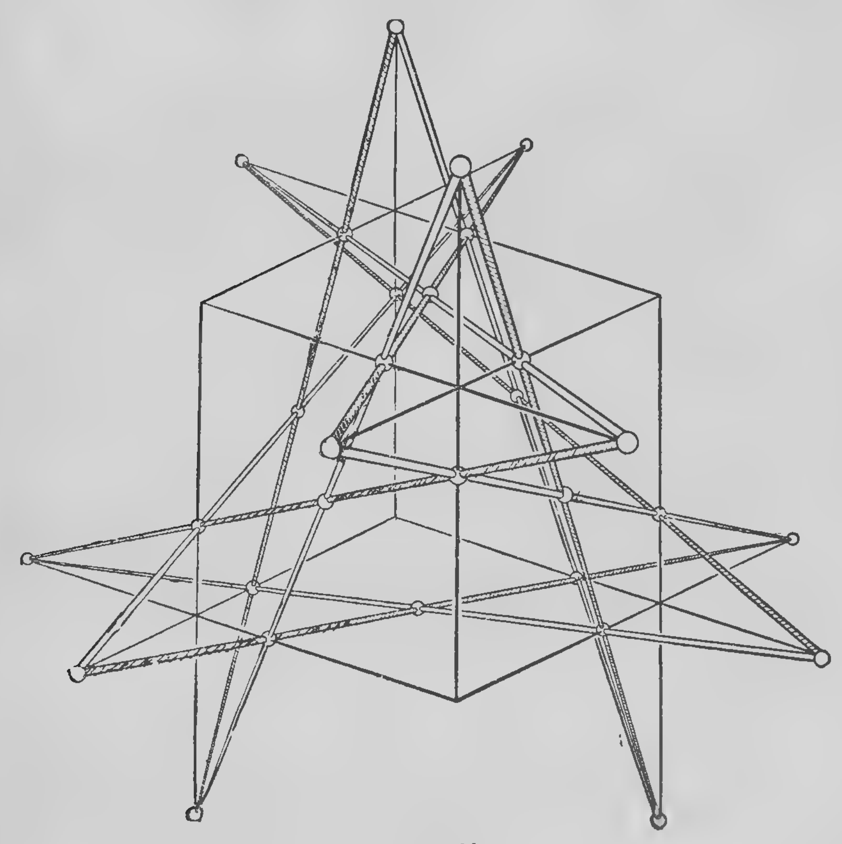


Черт. 180.

что противоречит нашему построению. Поэтому существует максимум две прямых, инцидентных с прямыми 2, 3, 4, 5. Но прямые 2, 3, 4, 5 по построению всегда инцидентны с прямой $6'$. Обозначим вторую прямую, инцидентную с прямыми 2, 3, 4, 5, цифрой $1'$. Мы утверждаем, что прямая $1'$ не совпадает с прямой $6'$ и кроме того пересекается с прямой 6. В силу этого утверждения, которое мы сейчас докажем, наша схема дополняется до схемы, изображенной на черт. 180, которая и представляет двойной шестисторонник. Можно непосредственно усмотреть, что здесь идет речь о правильной конфигурации точек и прямых по схеме $(30_2, 12_5)$. Можно при построении двойного шестисторонника придать ему особенно наглядное и симметричное расположение, если провести соответствующим образом на каждой из шести граней куба по одной прямой каждой шестерки. Это расположение непосредственно понятно из черт. 181 (ср. также черт. 102, стр. 89).

Теперь нам следует доказать только что приведенное утверждение, что имеется прямая $1'$, инцидентная с прямыми 2, 3, 4, 5 и отличная от прямой $6'$, и что эта прямая пересекает также прямую 6. Сначала примем первую часть утверждения за доказанную. Тогда мы покажем, что прямая $1'$ инцидентна с прямой 6. Для этой цели нанесем на прямой 1 четыре точки и на прямых $2', 3', 4', 5', 6'$ по три точки, т. е. всего девятнадцать точек, причем эти точки не должны совпадать с точками

пересечения названных прямых. Согласно сказанному в предыдущем параграфе эти девятнадцать точек определяют поверхность третьего порядка F_3. Но эта поверхность F_3 имеет с прямой 1 четыре общих точки, а потому должна содержать эту прямую целиком. С каждой из прямых 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ поверхность также должна иметь четыре общих точки, именно выбранные три точки и отличную от них точку пересечения с прямой 1. Таким образом поверхность F_3 содержит также прямые



Черт. 181.

2′, 3′, 4′, 5′, 6′. Отсюда далее следует, что эта поверхность содержит и прямые 2, 3, 4, 5, 6, так как каждая из этих прямых пересекается с четырьмя прямыми, лежащими на поверхности. Наконец на том же основании поверхность F_3 должна содержать и прямую 1′. Допустим теперь, что прямая 1′ не инцидентна с прямой 6, и рассмотрим прямую g, которая, так же как прямая 5′, инцидентна с четырьмя прямыми 2, 3, 4, 6. Мы снова, так же как при построении прямой 1′, исключаем случай, когда прямая g совпадает с прямой 5′. Прямая g не может совпасть с прямой 1′, так как по условию прямая 1′ не инцидентна с прямой 6. Прямая g есть одна из прямых, лежащих на поверхности F_3, так как

эта прямая пересекается с четырьмя прямыми этой поверхности, именно 2, 3, 4, 6. Рассмотрим теперь четверку прямых g, $1'$, $5'$, $6'$. Все эти прямые по построению пересекаются с тремя прямыми 2, 3, 4. Таким образом эта четверка гиперболоидальна. Мы утверждаем, что соответствующий гиперболоид целиком содержится в поверхности F_3. Это следует просто из того, что каждая прямая, инцидентная с прямыми g, $1'$, $5'$, $6'$, целиком лежит на поверхности F_3. Но совокупность таких прямых образует искомый гиперболоид.

Можно легко доказать алгебраически, что поверхность третьего порядка, содержащая целиком поверхность второго порядка, должна непременно состоять из этой поверхности и плоскости. Пусть $G = 0$ и $H = 0$ уравнения поверхностей третьего и второго порядка соответственно; тогда многочлен третьей степени G должен иметь делителем многочлен второй степени H, а это возможно лишь в том случае, если G представляет произведение многочлена H и некоторого линейного выражения. Но то, что проведенная через девятнадцать точек поверхность F_3 должна быть выродившейся, легко приводит к противоречию. Именно, так как среди прямых $2', 3', 4', 5', 6'$ никакие четыре не расположены гиперболоидально, то максимум три из них могли бы лежать на гиперболоиде, принадлежащем к поверхности F_3, и минимум две из них должны были бы принадлежать другой составной части поверхности F_3 — плоскости и, следовательно, должны быть инцидентными, что противоречит нашему построению.

Ход доказательства остается в существенных чертах неизменным, если мы будем рассматривать исключенную выше возможность, а именно, что прямая $1'$ (2345) совпадает с прямой $5'$ или прямая g (2346) совпадает с прямой $5'$. В этом случае также можно сделать заключение, что гиперболоид, определяемый прямыми 2, 3, 4, должен лежать на поверхности F_3. Однако предельный переход, позволяющий вывести этот случай из общего, может быть оправдан только алгебраическим путем.

При доказательстве последней инцидентности ($1'6$) двойного шестисторонника мы пользовались фактом, который интересен сам по себе, что через эту конфигурацию всегда проходит поверхность третьего порядка F_3. Эту конфигурацию можно легко дополнить несколькими другими прямыми, которые точно так же всегда лежат на поверхности F_3. Рассмотрим, например, плоскость, определяемую инцидентными прямыми $1, 2'$, а также плоскость прямых $1'$ и 2 и обозначим через (12) линию пересечения этих плоскостей. Тогда эта прямая инцидентна с четырьмя прямыми $1, 1', 2, 2'$, которые целиком лежат на поверхности F_3. Поэтому и прямая (12) лежит на поверхности F_3. Всего имеется пятнадцать прямых, находящихся в таком же отношении к двойному шестистороннику, как прямая (12), которые поэтому все лежат на поверхности F_3. Именно, из шести цифр можно образовать как раз пятнадцать различных пар. Таким образом мы нашли всего $2 \cdot 6 + 15 = 27$ прямых, которые все лежат на поверхности F_3.

Между прямыми этой расширенной конфигурации имеют место еще и другие инцидентности. Именно, можно доказать, что все те и только те прямые, обозначенные нами двумя цифрами, инциденты друг с другом,

у которых обе цифры символа различны. Доказательство можно провести, основываясь на тех же соображениях, которыми мы пользовались при доказательстве инцидентности прямых $1'$ и 6; мы здесь только наметим доказательство. Из соображений симметрии достаточно будет доказать инцидентность прямых (12) и (34). Для доказательства рассмотрим три прямые $1, 2$ (34). Эта тройка пересекается с прямыми $3'$ и $4'$. Если бы (12) не было инцидентное с (34), то существовала бы прямая a, которая пересекала бы четверку прямых $1, 2, 1', (34)$, и одна, обязательно отличная от a, прямая b, пересекающая прямые $1, 2, 2', (34)$. Если бы прямые a и b совпадали, то эта прямая пересекалась бы с четверкой прямых $1, 2, 1', 2'$, т. е. была бы тождественна с прямой (12). И кроме того эта же самая прямая пересекала бы прямую (34), что мы не предполагали вначале. Точно как же прямые a и b отличны от прямых $3'$ или $4'$, так как если бы, например, прямая a совпадала бы с прямой $3'$, то прямая $3'$ была бы инцидентна с прямой $1'$, вопреки нашему построению. Тогда прямые a и b точно так же, как прямые $3'$ и $4'$, лежали бы на поверхности F и эти четыре прямые были бы расположены гиперболоидально, так как они все инцидентны с тройкой прямых $1, 2, (34)$. Но мы уже доказали невозможность того, чтобы поверхность F_3 содержала гиперболоидальную четверку прямых. Отсюда следует, что прямая (12) действительно инцидентна с прямой (34) и по тем же причинам инцидентна с прямыми (35), (36), (45), (46), (56). А так как прямая (12) инцидентна также с прямыми $1, 2, 1', 2'$, то эта прямая, а также и всякая другая прямая, обозначаемая двумя цифрами, нашей расширенной конфигурации инцидентны с десятью прямыми конфигурации. То же самое имеет место и для прямых, образующих двойной шестисторонник. Так, например, прямая 1 инцидентна с пятью прямыми $2'$—$6'$ и с пятью прямыми (12), (13), (14), (15), (16). Поэтому схемой конфигурации 27 прямых поверхности F_3 будет $(135_2, 27_{10})$. Из соотношения $135 \cdot 2 = 27 \cdot 10$ следует, что конфигурация содержит в точности 135 точек. Кроме того можно также доказать, что эта конфигурация правильна и поэтому из нее можно выбрать различными способами двойные шестисторонники. Если добавить еще плоскости, содержащие две инцидентных прямых конфигурации, то такая плоскость всегда содержит третью прямую конфигурацию, в чем можно убедиться из схемы инцидентностей. К такому же результату приводит и простое алгебраическое рассуждение. Именно: всякая плоскость пересекается с поверхностью F_3 по кривой третьего порядка. Так как плоскость содержит две прямые конфигурации, то эта кривая третьего порядка должна содержать эти прямые, а отсюда алгебраическим путем можно вывести заключение, что кривая должна состоять из этих двух прямых и некоторой третьей прямой. Легко подсчитать, что через каждую из 27 прямых проходит пять таких плоскостей и что всего должно быть 45 таких плоскостей. Таким образом конфигурация не является двойственной самой себе, между тем как двойной шестисторонник двойственен сам себе, так как он построен на двойственно инвариантном соотношении инцидентности прямых. Можно легко дополнить двойной шестисторонник до конфигурации, двойственно соответствующей построенной выше конфигурации. Для этого следует вместо прямых (12) и остальных прямых (ik) взять другие прямые $[ik]$, из которых, напри-

мер, [12] проходит через точки пересечения прямых 1 и $2'$ и прямых $1'$ и 2. Схемой такой конфигурации будет $(35_3, 27_5)$.

Обратимся теперь снова к первоначальной конфигурации 27 прямых и покажем исчислительными методами, что на произвольной поверхности третьего порядка F_3 расположена такая конфигурация K. При этом, так же как и во всех рассуждениях исчислительной геометрии, следует принять во внимание и те случаи, когда K частично мнима или вырождается. Для доказательства нашего утверждения подсчитаем сначала, как велико множество двойных шестисторонников. По построению для прямой 1 мы имеем полную свободу, т. е. четыре параметра; точки пересечения прямых 1 с прямыми $2'—6'$ зависят еще от пяти параметров, а каждая из прямых $2'—6'$ при определенной точке пересечения ее с прямой 1 может занимать еще ∞^2 положений (десять параметров). Прямые $1, 2', 3', 4', 5', 6'$ определяют двойной шестисторонник; таким образом мы нашли, что имеется ∞^{19} двойных шестисторонников $(19 = 4 + 5 + 10)$. Также велико множество конфигураций K, так как каждая из них определяется соответствующим ей двойным шестисторонником, причем имеется только конечное число двойных шестисторонников в одной и той же конфигурации K. Но мы уже указали способ построения поверхности F_3, проходящей через конфигурацию K. Следовательно, множество построенных таким образом поверхностей F_3 составляет ∞^{19}; если же это множество менее обширно, то по крайней мере ∞^1 конфигураций K должны лежать на одной и той же поверхности F_3, т. е. поверхность F_3 должна быть линейчатой поверхностью третьего порядка. Но можно доказать, что имеется меньше чем ∞^{18} линейчатых поверхностей третьего порядка, а потому на построенных нами поверхностях F_3 должны лежать по крайней мере ∞^2 двойных шестисторонников. Но так как эти поверхности, как уже было доказано, не содержат гиперболоида и так как на линейчатых поверхностях порядка более высокого, чем второй, лежит только одно семейство прямых линий, то на одной поверхности F_3 не могут находиться ∞^2 двойных шестисторонников. Таким образом в общем случае построенные нами поверхности не могут быть линейчатыми, а отсюда следует, что наше построение охватывает не менее чем ∞^{19} поверхностей. С другой стороны, как было указано в предыдущем параграфе, вообще не может существовать более чем ∞^{19} поверхностей третьего порядка. Отсюда, принимая во внимание алгебраическую природу рассмотренных нами образов, можно строго доказать, что на каждой поверхности третьего порядка действительно лежит конфигурация K.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

До сих пор мы рассматривали геометрические образы со стороны их общей структуры. Диференциальная геометрия представляет собой принципиально иной метод исследования. Именно, теперь мы будем описывать кривые и поверхности лишь в непосредственной близости к какой-либо точке кривой или поверхности. С этой целью мы будем сравнивать окрестность точки с простейшими образами, например с прямой, плоскостью, кругом или шаром, которые в рассматриваемой окрестности возможно ближе подходят к кривой; таким образом возникает, например, известное понятие касательной к кривой в некоторой точке.

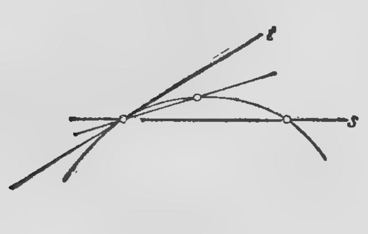
Этот способ рассмотрения, называемый локальной диференциальной геометрией или диференциальной геометрией в малом (im Kleinen), дополняется другим способом рассмотрения — диференциальной геометрией целых фигур (im Grossen). Например, если мы знаем о каком-нибудь непрерывном геометрическом образе, что он имеет определенное диференциально-геометрическое свойство в окрестности *любой* из своих точек, то, как правило, мы можем сделать существенные утверждения относительно общего поведения данного образа. Так, например, если относительно какой-нибудь плоской кривой известно, что она в окрестности каждой своей точки не лежит целиком по одну сторону касательной, то можно доказать, что такая кривая необходимо должна быть прямой.

Наряду с непрерывными многообразиями точек в диференциальной геометрии рассматриваются также многообразия других образов, например многообразия прямых; между прочим, такого рода проблему ставит геометрическая оптика, которая исследует непрерывные системы световых лучей.

Наконец диференциальная геометрия приводит к задаче, впервые поставленной Гауссом и Риманом, о построении геометрии как целого на основе таких понятий и аксиом, которые касаются лишь непосредственной окрестности каждой точки. Таким образом возникло еще до сих пор неисчерпанное изобилие возможностей более общих геометрий, среди которых «неевклидова геометрия» представляет важный, но весьма специальный пример. Общая теория относительности показала, что в основу рационального описания физической действительности должна быть положена не обычная евклидова геометрия, а более общая риманова геометрия.

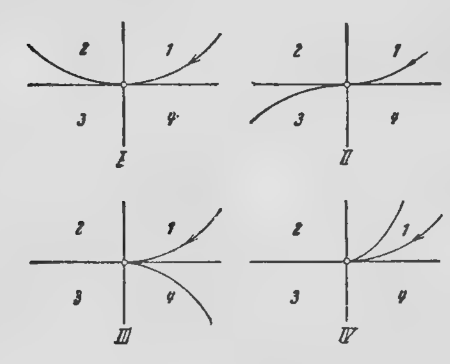
26. Плоские кривые. Чтобы начать с простейших случаев, рассмотрим сперва плоские кривые. При этом мы ограничимся рассмотрением небольших дуг кривой, на протяжении которых кривая не пересекает сама себя.

Прямая, пересекающая кривую в двух точках, называется секущей. Если мы станем вращать секущую s вокруг одной из точек пересечения так, чтобы вторая точка пересечения все более приближалась к первой (черт. 182), то секущая будет стремиться к определенному положению t. Прямая, принявшая это положение, называется касательной к кривой. Точка пересечения в этом случае называется точкой касания этой касательной. Очевидно, что касательная есть та прямая, проходящая через точку касания, направление которой в этом месте наиболее приближается к течению кривой; поэтому направлением кривой в некоторой точке называют направление соответствующей касательной. Говорят, что две кривые в общей точке пересекаются под углом α или соприкасаются, если обе касательные, проведенные в этой точке к кривым, образуют угол α или совпадают. Прямая, перпендикулярная к касательной в точке касания, называется нормалью к кривой.



Черт. 182.

Касательная и нормаль образуют для каждой точки кривой оси прямоугольной системы координат. Эта система координат особенно удобна для исследования поведения кривой в рассматриваемой точке. Для этого выберем произвольным образом некоторое направление движения по кривой. Далее занумеруем четыре квадранта, на которые оси разбивают плоскость, причем номером 1 обозначим тот квадрант (черт. 183), в котором мы находимся, когда движемся в установленном направлении по кривой по направлению к началу координат, находясь от него достаточно близко; номера 2, 3, 4 получат остальные квадранты; при этом всегда касательная отделяет квадранты 1 и 2 от квадрантов 3 и 4, а нормаль — квадранты 1 и 4 от квадрантов 2 и 3. Тогда можно различать четыре случая в зависимости от того, в каком квадранте — втором, третьем, четвертом или первом — мы находимся, когда движемся по кривой в установленном направлении, только что миновав начало координат (см. I—IV черт. 183). Только в первом случае рассматриваемая точка кривой называется правильной, во всех остальных случаях она называется особой точкой. Вообще почти все точки кривой ведут себя как правильные точки, между тем как особые точки встречаются только в отдельных местах [1]). В случае II говорят

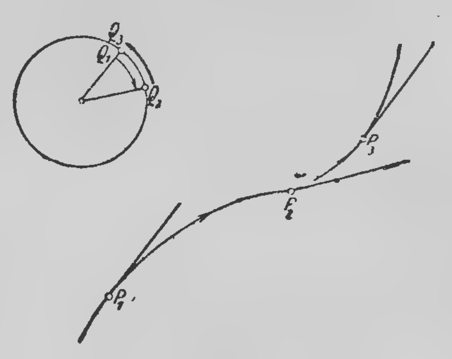


Черт. 183.

[1]) Это утверждение не имеет места только для прямой; точно так же для прямой непригоден данный здесь способ. С более глубокой точки зрения случай I также может приобрести особенный характер, именно, если круг кривизны вырождается в прямую или в точку; см. стр 160.

о точке перегиба; в двух последних случаях говорят, что кривая имеет острие или клюв и называют соответствующую точку кривой точкой возврата. Наконец можно показать, что наше разделение на четыре случая не зависит от выбранного направления на кривой.

Теперь попробуем представить себе наглядно, как изменяется направление касательной в этих точках кривой, когда точка касания движется по кривой. Для этого воспользуемся способом, который впервые был дан Гауссом и который играет особенно важную роль при исследовании поверхностей. Установим опять на кривой определенное направление движения. Затем начертим в плоскости кривой окружность радиуса 1. Примем далее, что каждой касательной к кривой соответствует тот радиус, который выходит из центра окружности параллельно рассматриваемой касательной, а именно в направлении установленного движения по кривой (черт. 184). Такое построение приводит в соответствие с каждой точкой P кривой некоторую точку Q окружности, а именно точку пересечения соответствующего радиуса с окружностью. При таком отображении точки окружности образуют «индикатрису касательных» к кривой. Так как радиус окружности всегда перпендикулярен к касательной в соответствующей точке окружности, то касательная к кривой всегда параллельна соответствующей нормали к индикатрисе, и обратно, касательная к индикатрисе параллельна соответствующей нормали к кривой.



Черт. 184.

Гауссово изображение приводит в соответствие каждой точке кривой единственную точку окружности, но, обратно, одной точке окружности обычно соответствует не одна, а несколько точек кривой, а именно все те точки, которые имеют параллельные и, в соответствии с принятым направлением движения по кривой, направленные в одну сторону касательные (P_1 и P_3 на черт. 184).

Пусть теперь некоторая подвижная точка пробегает кривые, изображенные на черт. 183; в рассматриваемом месте в случаях *III* и *IV* эта точка изменяет направление своего движения, а в случаях *I* и *II* сохраняет его. Теперь рассмотрим поведение соответствующей точки на индикатрисе. Эта точка движется по окружности в одном направлении в случаях *I* и *III* и изменяет направление движения в случаях *II* и *IV*. В самом деле, в случаях *II* и *IV* в окрестности рассматриваемой точки кривой имеются параллельные и одинаково направленные касательные; в двух других случаях этого нет. Так как направление, в котором движется точка на индикатрисе, указывает на изменение направления касательной к кривой, то мы можем следующим образом охарактеризовать четыре рода точек кривой.

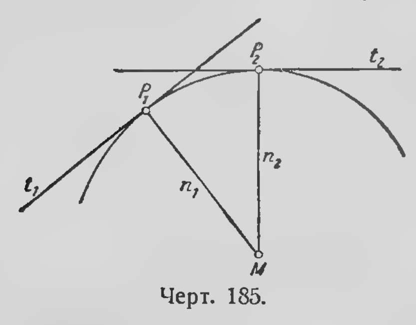
I. *Правильная точка:* точка кривой и ее образ на индикатрисе продолжают движение в прежнем направлении.

II. *Точка перегиба:* точка кривой движется дальше в прежнем направлении, в то время как ее образ на индикатрисе меняет направление движения.

III. *Острие:* точка кривой поворачивает обратно, а ее образ на индикатрисе движется дальше в прежнем направлении.

IV. *Клюв:* точка кривой и ее образ на индикатрисе изменяют направление движения.

Это деление не исчерпывает всех возможных случаев. Если даже ограничиться только такими дугами кривых, которые допускают простое аналитическое представление, то и здесь имеются еще следующие три возможности: двойные точки, в которых кривая пересекает сама себя, точки, в которых кривая внезапно обрывается, и наконец кривая может иметь изолированные точки, т. е. такие точки, которые полностью отделены от всех остальных точек кривой (стр. 177). Замечательно, что имеются и другие очень простые и наглядные случаи, например точки излома с углом, отличным от нуля, которые требуют довольно сложного аналитического исследования.



Черт. 185.

Теперь мы переходим к введению понятия кривизны, чрезвычайно важного для всей теории кривых и поверхностей. Как мы увидим, это понятие тесно связано с гауссовым изображением с помощью касательных. Проведем в двух соседних точках P_1 и P_2 кривой касательные t_1 и t_2 и нормали n_1 и n_2; пусть M будет точкой пересечения обеих нормалей (черт. 185). Очевидно, угол между обеими касательными равен углу между нормалями:

$$\sphericalangle (t_1, t_2) = \sphericalangle (n_1, n_2).$$

Пусть теперь точка P_2 кривой все ближе подходит к точке P_1; рассмотрим отношение этого угла к расстоянию между двумя взятыми точками кривой. Это отношение, вообще говоря, стремится к некоторому пределу:

$$\lim_{P_1P_2 \to 0} \frac{\sphericalangle (n_1, n_2)}{P_1P_2} = k.$$

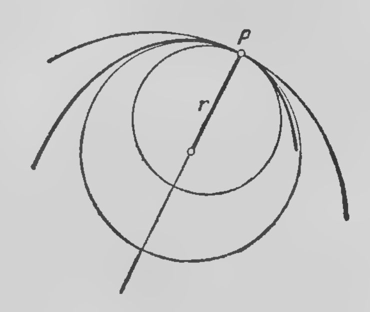
Это предельное значение k называется кривизной кривой в точке P_1.

k равно обратной величине отрезка r, в который переходят в пределе обе сливающиеся нормали MP_1 и MP_2. Это вытекает из следующего преобразования, аналитический вывод которого мы опускаем:

$$k = \lim_{P_1P_2 \to 0} \frac{\sphericalangle (n_1 n_2)}{P_1P_2} = \lim_{P_1P_2 \to 0} \frac{\sin (n_1, n_2)}{P_1P_2} = \lim_{P_1P_2 \to 0} \frac{P_1P_2}{MP_1 \cdot P_1P_2} = \lim_{P_1P_2 \to 0} \frac{1}{MP_1} = \frac{1}{r}.$$

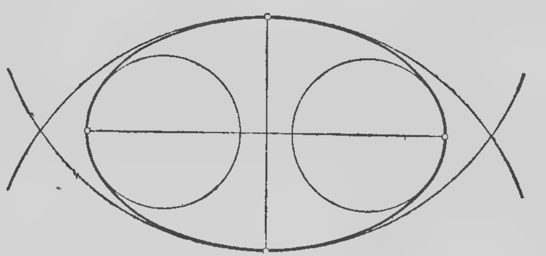
Мы можем и другим путем притти к величине r. Проведем окружность через точку P_1 и две соседние точки на кривой. Если теперь мы заставим обе соседние точки стремиться к точке P_1 по кривой, то наша

окружность будет стремиться к некоторому предельному положению. Как можно было ожидать из построения и как это подтверждает аналитическое исследование, предельное положение окружности, проведенной указанным образом через точку P_1, есть та окружность, которая имеет центром предельное положение точки M пересечения нормалей и, следовательно, имеет радиус r. Этот круг называется кругом кривизны кривой в точке P_1, его центр — центром кривизны, а его радиус r — радиусом кривизны. Вследствие указанного построения обычно говорят, что круг кривизны имеет три сливающихся общих точки с кривой. Подобным же образом говорят, что касательная имеет с кривой две сливающихся общих точки.



Черт. 186.

Круг кривизны можно определить также и другим способом. Рассмотрим все окружности, проходящие через точку P кривой (черт. 186), касающиеся кривой в этой точке, с центрами, лежащими на соответствующей нормали кривой. Кривая разбивает плоскость в окрестности точки P на две части, которые мы назовем сторонами дуги кривой. Одни из рассматриваемых окружностей будут расположены в окрестности точки P целиком по одну сторону дуги кривой, другие — целиком по другую сторону. Круг кривизны, радиус которого обозначим через r, обладает вообще тем свойством, что он разделяет оба вида окружностей и именно так, что все окружности, радиусы которых больше r, расположены по одну сторону, а все окружности, радиусы которых меньше r, расположены по другую сторону кривой. Сам круг кривизны, как правило, по разные стороны от нормали расположен по разные стороны от кривой, т. е. он пересекает кривую в точке касания. Точки, в которых круг кривизны не пересекает кривой, точно так же как и особые точки, могут встречаться лишь в отдельных, исключительных местах кривой. Примеры таких точек дают четыре вершины эллипса (черт. 187). Из соображений симметрии ясно, что в этих точках не может быть пересечения. То же самое должно быть вообще во всех тех точках кривой, в которых кривая пересекается осью симметрии.



Черт. 187.

То, что круг кривизны обычно пересекает кривую, можно вывести из первого способа получения круга кривизны. Кривая, вообще говоря, пересекается с окружностью, которая проходит через какую-нибудь из ее точек в этой точке. Следовательно, окружность, проходящая через три соседние точки кривой, переходит в первой точке со стороны A на сторону B, во второй точке — со стороны B на сторону A, в третьей точке —

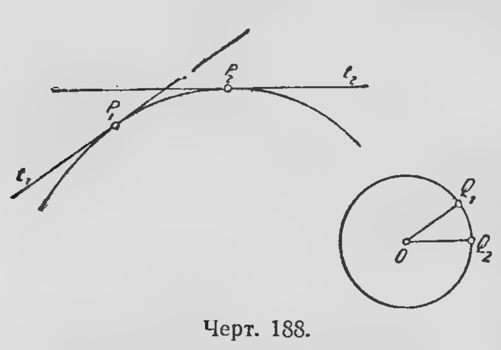
со стороны A на сторону B; когда три точки сливаются, поведение окружности обычно не меняется, так что круг кривизны в точке соприкосновения в самом деле должен переходить с одной стороны кривой на другую [1]).

Как уже было упомянуто, кривизна находится в связи с индикатрисой касательных. Пусть точкам P_1 и P_2 кривой соответствуют точки Q_1 и Q_2 на индикатрисе (черт. 188). Тогда имеем:

$$\measuredangle(t_1 t_2) = \measuredangle(Q_1 O Q_2) = \overset{\frown}{Q_1 Q_2},$$

т. е. радиус кривизны есть предел отношения длины малой дуги кривой к ее изображению на индикатрисе.

Радиус кривизны для отдельных точек кривой может стать бесконечным; тогда круг кривизны вырождается в прямую и, следовательно, совпадает с касательной. Обычно в такой точке касательная пересекает кривую, и следовательно, мы имеем дело с точкой перегиба; однако бывают и исключительные случаи, когда кривизна обращается в нуль, но тем не менее кривая не пересекается своей касательной; эти случаи аналогичны поведению круга кривизны в вершинах эллипса (см. сноску на стр. 156).



Черт. 188.

Из отношения кривизны к индикатрисе касательных следует далее, что в случае острия кривизна, как правило, становится бесконечно большой, т. е. что в этих точках круг кривизны стягивается в точку соприкосновения. Для клюва нельзя высказать никаких общих утверждений.

В связи с установленными нами понятиями возникает целый ряд важных вопросов. Так, например, напрашивается попытка определить кривую таким образом, чтобы кривизна являлась заданной функцией длины дуги кривой. Можно доказать аналитически, что вид кривой таким путем однозначно определяется, а с другой стороны, что любой произвольно заданной таким способом функции (с известными предположениями относительно непрерывности) действительно соответствует некоторая кривая. Такой способ определения имеет то преимущество, что он не связан со специальной координатной системой. Поэтому длину дуги и кривизну называют естественными параметрами кривой. Простейший случай — это тот, когда кривизна k всюду постоянна. Это имеет место для круга радиуса $\frac{1}{k}$ и, как следует из вышесказанного, только для него. В случае $k=0$ мы получаем прямую; прямые и окружности суть таким образом единственные плоские кривые постоянной кривизны.

---

[1]) На том же самом основании кривая обычно не пересекается со своей касательной.

Далее, можно многими способами получить из одной кривой другую. Так, например, совокупность центров кривизны дает новую кривую, которая называется эволютой первоначальной кривой. Если, наоборот, исходить от этой новой кривой, то первоначальная кривая называется эвольвентой новой. Эвольвенты любой кривой можно всегда получить при помощи нитяной конструкции, если туго намотать кусок нити на кривую, закрепив один конец; тогда при разматывании другой конец нити описывает дугу эвольвенты, если при разматывании нить остается натянутой. Эвольвенты круга мы уже получали таким способом на стр. 14. Почему между эвольвентой и эволютой всегда существует такое своеобразное соотношение, мы увидим в следующей главе (§ 41).

27. Пространственные кривые. Большинство рассмотрений, проведенных в предыдущем параграфе, можно перенести и на случай пространства.

Касательная опять получается как предельное положение секущей при слиянии двух точек пересечения. Однако в противоположность тому, что мы имели для плоских кривых, в пространстве имеется бесчисленное множество перпендикуляров к касательной в точке касания. Эти перпендикуляры заполняют целую плоскость, именно нормальную плоскость к кривой в этой точке.

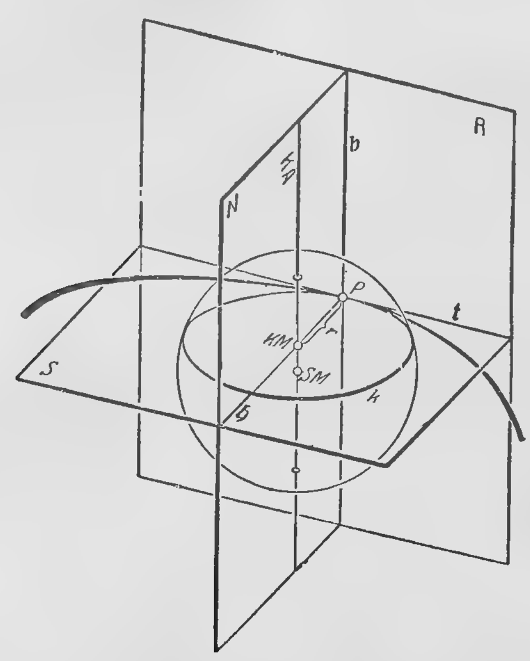
Теперь будем искать плоскость, которая наиболее близко подходит к кривой в рассматриваемой точке. С этой целью проведем плоскость через касательную в рассматриваемой точке и через соседнюю точку кривой и будем следить за изменением положения этой плоскости, если соседняя точка кривой будет приближаться к точке касания нашей касательной. Предельное положение, к которому стремится при этом плоскость, и определит искомую плоскость, называемую *соприкасающейся плоскостью* кривой в рассматриваемой точке. Соприкасающаяся плоскость в указанном выше смысле имеет с кривой три совпадающие общие точки. Отсюда следует, что она, вообще говоря, пересекает кривую в точке соприкосновения, между тем как все остальные плоскости, проходящие через касательную, оставляют кривую по одну сторону.

Так как соприкасающаяся плоскость содержит касательную, то она перпендикулярна к нормальной плоскости. Теперь мы рассмотрим еще ту плоскость, проходящую через взятую точку кривой, которая перпендикулярна как к нормальной плоскости, так и к соприкасающейся плоскости. Эта плоскость называется *спрямляющей плоскостью.*

Три названные плоскости можно рассматривать как координатные плоскости пространственной декартовой системы координат, которая особенно удобна для описания поведения кривой в рассматриваемой точке. Касательная есть одна ось этой системы; две другие оси, которые лежат в нормальной плоскости, называются главной нормалью и бинормалью; главная нормаль лежит в соприкасающейся плоскости, а бинормаль — в спрямляющей плоскости (черт. 189). Эти три плоскости ввиду их зависимости от точки кривой называются сопровождающим трехгранником кривой. Этот трехгранник соответствует системе из касательной и нормали для плоской кривой.

В пространстве координатная система определяет не четыре, как на плоскости, а восемь областей. При помощи сопровождающего трехгранника можно аналогично рассмотрению на стр. 156 различать восемь видов

точек кривой. Опять-таки только один из этих случаев правильный, остальные (если только кривая действительно пространственная, а не лежит в одной плоскости) могут встречаться только в отдельных местах. В случае правильной точки кривая пересекает соприкасающуюся плоскость и нормальную плоскость и остается по одну сторону спрямляющей плоскости. Рассмотрения остальных случаев мы здесь приводить не будем.



Черт. 189. P — рассматриваемая точка кривой; S — соприкасающаяся плоскость; N — нормальная плоскость; R — спрямляющая плоскость; t — касательная; $\mathfrak{h}$ — главная нормаль; b — бинормаль; k — круг кривизны; r — радиус кривизны; KA — ось кривизны; KM — центр кривизны; SM — центр соприкасающегося шара.

В случае пространственных кривых простого аналитического строения, так же как и в случае плоских кривых, могут иметь место еще три особенности, именно: двойные точки, концевые точки и изолированные точки.

Теперь мы обобщим гауссово изображение на случай пространства. С этой целью построим шар радиуса единицы. Для каждой касательной к кривой (на которой определено направление движения) проведем параллельно ей направленный радиус шара. Конец радиуса на поверхности шара назовем изображением соответствующей точки кривой, полученным с помощью касательной. Всей кривой тогда соответствует определенная кривая на поверхности шара, сферическая индикатриса касательных. Если исходить не от касательной, а от главной нормали или бинормали, то можно получить две другие кривые на единичном шаре; эти три «сферических индикатрисы» находятся в простых соотношениях со своим сопровождающим трехгранником и взятой кривой. Индикатриса касательных и индикатриса бинормалей вместе характеризуют, например, упомянутые восемь типов точек кривой. Именно, сама точка кривой, касательная и бинормаль либо движутся по кривой в том же направлении дальше, либо меняют направление. Комбинация различных возможностей дает как раз восемь случаев.

Перенесем теперь понятие кривизны на пространственные кривые. Проведем в двух соседних точках кривой P_1 и P_2 касательные t_1 и t_2 и рассмотрим отношение $\frac{\sphericalangle\, t_1 t_2}{P_1 P_2}$. Когда точка P_2 стремится к точке P_1, то это отношение, как правило, стремится к некоторому пределу, который называется кривизной кривой в точке P_1. На плоскости кривизна

находится в определенном соотношении с предельным положением точки пересечения двух нормалей. Аналогичное рассмотрение в пространстве дает не одну точку, а целую прямую. Именно, рассматривают прямую пересечения соседних нормальных плоскостей и называют ее предельное положение осью кривизны кривой. Она находится в нормальной плоскости и, как следует из перехода к пределу, она параллельна бинормали (черт. 189). Точка пересечения ее с главной нормалью называется центром кривизны. Расстояние r этой точки от соответствующей точки кривой называется радиусом кривизны. Так же как и на плоскости, r равно обратной величине кривизны. Если провести через три соседние точки кривой окружность и затем сближать эти три точки до совпадения, то в пределе получается круг кривизны — круг, который лежит в соприкасающейся плоскости и имеет центром центр кривизны, а радиусом — радиус кривизны.

С гауссовой индикатрисой касательных кривизна находится в таком же соотношении, как и в случае плоскости; радиус кривизны есть предельное значение отношения малой дуги кривой к соответствующей дуге индикатрисы касательных. Доказательство можно провести так же, как для плоскости.

Вместо угла между двумя касательными можно взять угол между двумя соприкасающимися плоскостями, или, что то же самое, угол между двумя бинормалями; при этом приходим к новому, очень важному в теории пространственных кривых понятию. Если разделить этот угол на расстояние между соответствующими точками кривой и заставить сближаться эти точки, то предельное значение t этого отношения называется кручением или второй кривизной кривой во взятой точке. Обратная величина кручения, очевидно, есть предел отношения длины малой дуги к ее изображению на индикатрисе бинормалей.

Кривизну можно было получить путем предельного перехода, в котором участвуют три соседние точки кривой. Чтобы получить аналогичное толкование для кручения, необходимо исходить от четырех соседних точек. Четырьмя точками вообще определяется шар. Рассмотрим предельное положение шара, проходящего через четыре соседние, стремящиеся к совпадению точки кривой. Шар, принимающий это предельное положение, называется соприкасающимся шаром. Как видно из предельного перехода, соответствующая касательная касается этого шара, а центр его лежит на оси кривизны (черт. 189). Для расстояния этой точки от центра кривизны вычисление дает значение $\frac{1}{t}\cdot\frac{dr}{ds}$, где dr и ds — дифференциалы длины дуги и радиуса кривизны. Далее из построения можно заключить, что соприкасающийся шар пересекается с соприкасающейся плоскостью как раз по кругу кривизны. Для радиуса соприкасающегося шара получаем отсюда по теореме Пифагора значение:

$$\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\cdot\frac{1}{t^2}}.$$

Точно так же как на плоскости величины s и r, так в пространстве величины s, r, t называются естественными параметрами кривой. Аналогично тому, что было на плоскости, в пространстве справедлива следую-

щая теорема: вид пространственной кривой может быть одним и только одним способом определен так, что при этом r и t будут наперед заданными функциями от s. Если $\frac{1}{r}$ тождествеино обращается в нуль, то мы получаем прямую. Тождественное обращение в нуль t характеризует плоские кривые. Если же r и t постоянны и отличны от нуля, то мы получаем винтовые линии.

Кривые на шаре характеризуются несколько более сложным условием. Шар, на котором расположены кривые, должен для всех точек кривой быть вместе с тем соприкасающимся шаром. Таким образом вычисленный выше радиус соприкасающегося шара должен быть постоянным:

$$r^2+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\cdot\frac{1}{t^2}=\text{const}.$$

Можно доказать аналитически, что это условие в то же время достаточно.

Другие вопросы, относящиеся к пространственным кривым, мы разберем ниже в теории поверхностей.

28. Кривизна поверхности. Случаи эллиптический, гиперболический и параболический. Линии кривизны и асимптотические линии; точки округления, минимальные поверхности, «обезьянье седло». Ограничимся небольшим куском поверхности, таким, который не пересекает сам себя, и оставим граничные точки куска вне рассмотрения. Рассмотрим точку P поверхности и все кривые, расположенные на поверхности и проходящие через точку P. Замечательно, что все касательные, которые можно провести к этим кривым в точке P, лежат вообще в одной плоскости, которая вследствие этого называется касательной плоскостью к поверхности в точке P. Точки, в которых существуют касательные плоскости, называются правильными, все остальные — особыми точками. Особые точки не могут заполнять всю поверхность; они могут заполнить лишь отдельные группы кривых на поверхности.

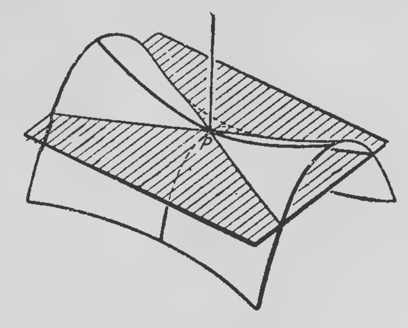
Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в правильной точке P поверхности, называется нормалью к поверхности в точке P. Кривые, получающиеся при пересечении поверхности плоскостями, проходящими через нормаль к поверхности, называются нормальными сечениями. Нормальные сечения в правильной точке P или правильны в точке P, или имеют в этой точке точку перегиба.

Теперь задача состоит в том, чтобы перенести понятие кривизны на поверхности. В случае кривых кривизна характеризовала отклонение кривой от своей касательной в рассматриваемой точке. Поставим теперь аналогичный вопрос о поведении поверхности по отношению к своей касательной плоскости. Здесь, очевидно, можно различать два существенно различных случая, а именно: точки с выпуклой и точки с седлообразной кривизной.

Точка с выпуклой кривизной характеризуется тем, что касательная плоскость, касающаяся поверхности в этой точке, не пересекает поверхности в ближайшей окрестности рассматриваемой точки, а лежит целиком по одну сторону поверхности. Иначе говоря, в такой точке поверхность можно положить на плоскость стола. Примеры поверхностей,

выпуклых во всех своих точках, представляют шар и эллипсоид. Точки выпуклой кривизны называются также точками эллиптической кривизны.

Поведение поверхности в точке седлообразной кривизны можно легче всего уяснить на поверхности, имеющей вид горного перевала (черт. 190). Касательная плоскость в высшей точке P перевала расположена горизонтально. Хребет поднимается вправо и влево от точки P вверх, в то время как спереди и сзади от этой точки склоны хребта идут вниз. Касательная плоскость в точке P должна, следовательно, пересекать поверхность по кривой, состоящей из двух пересекающихся в точке P ветвей (иначе говоря, имеются два горизонтальных пути, пересекающихся на перевале). Такое поведение касательной плоскости характерно для точек седлообразной кривизны, и ясно, что поверхность в точке такого рода нельзя положить на плоскость стола. Примеры поверхностей, всюду искривленных седлообразно, представляют однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Точки с седлообразной кривизной называются также гиперболическими точками. Выпуклый и седлообразный типы отделяются один от другого переходным случаем — точками параболической кривизны. Эти точки можно получить, например, следующим способом: будем исходить из двух кусков поверхностей F и G, соприкасающихся в некоторой точке P, т. е. имеющих в точке P общую касательную плоскость, причем поверхность F в точке P имеет эллиптическую точку, а поверхность G — гиперболическую точку. Будем теперь непрерывно деформировать поверхность F так, чтобы точка P и соответствующая касательная плоскость оставались неизменными, а поверхность F в конце концов перешла бы в поверхность G; тогда деформируемая поверхность в процессе деформации примет в некоторый момент такой вид, при котором точка P будет для нее параболической точкой. Так, например, если мы на черт. 190 будем склонять хребет по обе стороны перевала так, чтобы гребень хребта всюду все еще касался горизонтальной касательной плоскости, то точка P будет параболической точкой. В самом деле, если мы наш хребет направо и налево будем склонять еще больше, то прежний перевал превратится в купол, т. е. станет эллиптической точкой поверхности. Однако этот пример не дает всех типов параболических точек. Наоборот, имеется несколько весьма различных типов параболических точек, с которыми мы познакомимся впоследствии (стр. 175—176, 177, 180), между прочим, и таких, которые нельзя выразить просто как переходный случай между эллиптической и гиперболической точками.

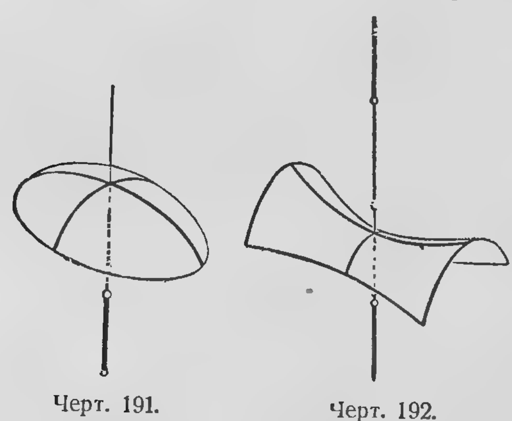


Черт. 190.

Чтобы дать также численное выражение кривизне, можно исходить из кривизн нормальных сечений в некоторой точке P поверхности. Центр кривизны такого нормального сечения в точке P всегда лежит на нормали к поверхности, проходящей через точку P, ибо эта нормаль слу-

жит нормалью для всех нормальных сечений, проходящих через точку P. Мы можем получить все нормальные сечения, если будем вращать плоскость, проходящую через нормаль к поверхности, вокруг этой нормали. При этом вращении центр кривизны будет определенным образом двигаться по нормали и тем самым давать картину свойств кривизны в данной точке поверхности.

В случае эллиптической точки P (черт. 191) центры кривизны лежат на нормали по одну сторону от точки P. Вообще при вращении нормальной плоскости радиус кривизны будет изменять свою величину, и для некоторого определенного нормального сечения s_1 он получит наибольшее значение r_1, а для другого, s_2—наименьшее значение r_2. r_1 и r_2 называются главными радиусами кривизны поверхности в точке P; обратные величины $k_1=\frac{1}{r_1}$ и $k_2=\frac{1}{r_2}$ называются главными кривизнами, а направления касательных к s_1 и s_2 в точке P называются направлениями кривизн. Оказывается, что эти направления в правильной точке всегда перпендикулярны друг другу, и вследствие этого кривизна любого нормального сечения полностью определяется главными кривизнами и углом этого нормального сечения с направлениями кривизны.



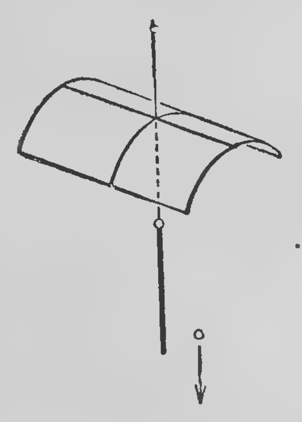
Черт. 191. Черт. 192.

В случае гиперболической точки P (черт. 192) центры кривизны лежат на нормали по обе стороны от точки P.

Именно, когда нормальное сечение на поверхности, имеющей вид горного перевала, проходит по обоим хребтам, центр кривизны лежит выше рассматриваемой точки P, когда же сечение проходит по обоим склонам, то центр кривизны лежит ниже точки P. При этом имеется одно нормальное сечение, центр кривизны которого лежит над точкой P и кривизна которого больше, чем кривизна всех других нормальных сечений этого рода. Если мы станем поворачивать нормальную плоскость из этого положения, то кривизна будет непрерывно уменьшаться, а радиус кривизны увеличиваться. Когда наконец нормальная плоскость совпадает с направлением одного из начерченных на черт. 190 горизонтальных путей, проходящих через точку P, то кривизна станет равной нулю, а центр кривизны удалится вверх в бесконечность. Если продолжать поворачивать дальше нормальную плоскость, то центр кривизны скачком переходит на нижнюю полупрямую нормали и далее из бесконечности снизу начнет двигаться вверх, т. е. радиус кривизны будет убывать, а кривизна возрастать. Наконец кривизна получит некоторое значение k_2 большее, чем кривизна всех остальных нормальных сечений, центр кривизны которых лежит ниже точки P. Так же как в случае эллиптиче-

ской точки, k_1 и k_2 называются главными кривизнами, а направление соответствующих нормальных сечений — направлениями кривизны. В случае гиперболической точки направления кривизны также перпендикулярны друг другу. Кроме того они делят пополам углы между обеими ветвями кривой, по которым касательная плоскость пересекает поверхность. Направления обеих этих ветвей кривой называются асимптотическими направлениями в точке P.

В параболических точках вообще также существуют два перпендикулярных друг другу направления кривизны, в которых кривизна k_1 и k_2 соответствующих нормальных сечений больше и меньше кривизны всех остальных нормальных сечений. Параболические точки характеризуются тем, что одна из двух главных кривизн равна нулю. Вообще вторая главная кривизна отлична от нуля. При этом центр кривизны движется из положения, в котором он соответствует главной кривизне, отличной от нуля, вдоль по нормали в бесконечность (черт. 193). Таким образом в параболической точке, вообще говоря, имеется ровно одно нормальное сечение с кривизной, равной нулю. Направление его есть одно из направлений кривизны; но его можно рассматривать также и как асимптотическое направление.



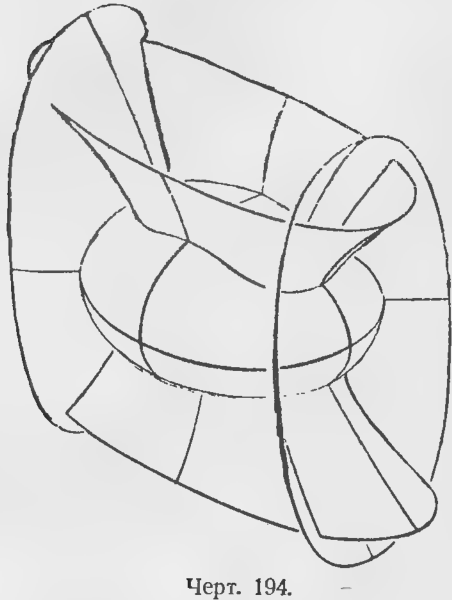
Черт. 193.

На каждом куске поверхности можно аналитически определить все кривые, направление которых в каждой точке совпадает с направлением одной из двух главных кривизн. Таким образом можно получить сеть кривых на поверхности, т. е. систему из двух семейств кривых, каждое из которых покрывает сплошь весь кусок поверхности. Эти кривые называются линиями кривизны поверхности. Согласно вышесказанному линии кривизны в каждой точке поверхности перпендикулярны друг к другу; значит они образуют ортогональную систему на поверхности.

Имеются, однако, точки, для которых вышеприведенные рассуждения теряют силу. Именно, мы исходили из предпосылки, что кривизна нормального сечения изменяется при вращении нормальной плоскости. Может, однако, случиться, что все нормальные сечения в какой-нибудь точке имеют одинаковую кривизну. Тогда направления главных кривизн становятся неопределенными; такие точки называются точками округления. Пример поверхности, состоящей только из одних точек округления, очевидно, представляет шар. Впрочем, шары и плоскости суть единственные поверхности, состоящие только из точек округления. Вообще же точки округления встречаются в виде изолированных точек. Сеть линий кривизны в этих точках и только в них может иметь особенности.

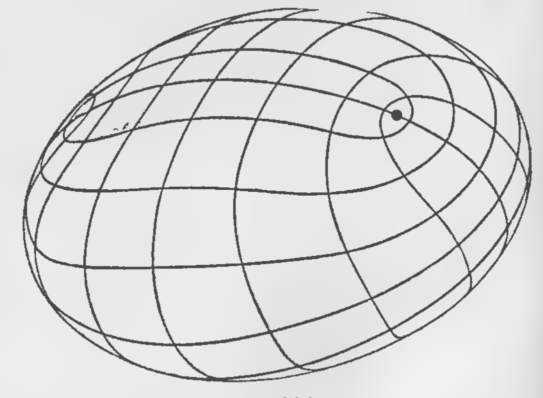
Для линий кривизны имеет место интересная теорема Дюпена. Мы уже (стр. 13) ознакомились с понятием ортогональных семейств кривых на плоскости. Пространственную аналогию таких семейств представляют семейства поверхностей, у которых касательные плоскости в каждой точке взаимно перпендикулярны. Так как на плоскости через всякую точку

можно провести лишь две взаимно перпендикулярные кривые, а в пространстве можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости, то естественно рассматривать такие ортогональные семейства поверхностей, которые в каждой точке пространства имеют по три взаимно перпендикулярных поверхности. Пример подобной ортогональной системы представляют уже ранее упомянутые софокусные поверхности второго порядка.



Черт. 194.

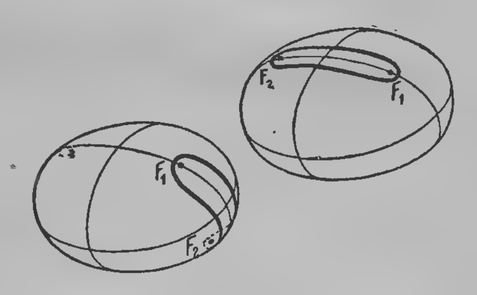
На плоскости (а также и на всякой кривой поверхности) для каждого заданного семейства кривых можно найти ортогональные семейства кривых. В соответствии с этим можно было бы ожидать, что в пространстве для двух ортогональных семейств поверхностей всегда можно найти третье ортогональное семейство. Однако согласно теореме Дюпена такое предположение несправедливо. Именно, эта теорема утверждает, что поверхности тройной ортогональной системы всегда пересекаются по линиям кривизны. Поэтому, если двойная ортогональная система поверхностей может быть расширена до тройной ортогональной системы, то заданные поверхности должны пересекаться по линиям кривизны. Это условие также и достаточно. Из теоремы Дюпена следует, что линиями кривизны на эллипсоиде являются кривые пересечения его с софокусными однополостными и двуполостными гиперболоидами (черт. 194). Определенная таким образом сеть кривых (черт. 195) имеет особенности в точках пересечения эллипсоида с фокальной гиперболой. В самом деле, эти четыре точки пересечения являются точками округления эллипсоида.



Черт. 195.

Линии кривизны на эллипсоиде располагаются вокруг точек округления, подобно тому как на плоскости располагается система софокусных эллипсов и гипербол вокруг общих фокусов (черт. 7, стр. 13). Это видимое сходство не случайно; оно выражает внутреннее родство обоих се-

мейств кривых. Именно, мы можем построить линии кривизны на эллипсоиде при помощи нити, используя две точки округления, подобно тому как мы пользовались фокусами и получали эллипсы на плоскости при помощи нитяной конструкции. Четыре точки округления эллипсоида попарно диаметрально противоположны друг другу. Поэтому можно двумя различными способами (черт. 196) выбрать две точки округления так, что они не будут противоположны. В этих двух точках F_1 и F_2 закрепим концы нити достаточной длины, а затем будем натягивать нить в точке P, но так, чтобы эта точка лежала на эллипсоиде. Тогда нить должна расположиться по всей своей длине на эллипсоиде. Различные положения, которые при этом может принять точка P на эллипсоиде, располагаются на одной линии кривизны. В зависимости от выбора двух точек округления, изменяя длину нити, мы получаем одно из двух семейств линий кривизны. Таким образом, в то время как в софокусной системе конических сечений одно семейство кривых состоит из эллипсов, а другое из гипербол, на эллипсоиде оба семейства можно рассматривать как обобщенные эллипсы.



Черт. 196.

Кривые на эллипсоиде, вдоль которых располагается нить, соответствуют радиусам-векторам эллипса, т. е. прямым линиям, и так же, как прямые на плоскости, характеризуются тем свойством, что они дают кратчайшее расстояние на поверхности между любыми двумя ее точками. Такие кривые называются геодезическими линиями поверхности. Ниже (стр. 194—198) мы займемся теорией этих кривых.

Для гиперболических точек наряду с главными направлениями кривизны мы имеем еще два особых направления, а именно — асимптотические направления. Аналогично линиям кривизны можно определить также сеть таких кривых, которые в каждой точке имеют асимптотическое направление. Такие кривые называются асимптотическими линиями поверхности.

В случае гиперболических точек также может случиться, что обе главные кривизны равны. Такие точки имеют известное сходство с точками округления. Поверхности, состоящие только из таких точек, называются минимальными поверхностями. Они характеризуются еще и тем, что их асимптотические линии образуют ортогональную сеть. В то время как совокупность поверхностей, обладающих только точками округления, состоит лишь из шаров, класс минимальных поверхностей значительно шире. Так, минимальную поверхность можно получить, если взять любой формы замкнутую проволочную фигуру и опустить ее в мыльный раствор. Мыльная пленка, которая натягивается между проволокой, всегда имеет вид минимальной поверхности (черт. 219—220, стр. 186). Закон поверхностного натяжения, которому подчиняется мыльная пленка, состоит в том, что пленка стремится принять форму поверхности наименьшей площади. В соответствии с этим можно чисто математически охарактеризовать

минимальные поверхности как такие, которые имеют наименьшую площадь из всех поверхностей, ограниченных некоторой заданной замкнутой пространственной кривой. При этом замечательно, что эта характеристика, исходящая из общей протяженности некоторого куска поверхности, приводит к тем же поверхностям, как и вышеуказанное свойство, которое касалось лишь ближайшей окрестности любой точки поверхности. Эту связь можно следующим образом сделать более наглядной. Возьмем на некоторой заданной минимальной поверхности, ограниченной некоторой замкнутой кривой S, произвольную, очень малую замкнутую кривую s. Рассмотрим теперь кусок минимальной поверхности, расположенный внутри s. Мы утверждаем, что этот кусок имеет меньшую площадь, чем все другие куски поверхностей, которые могут быть заключены внутри s. В противном случае мы могли бы изменить кусок поверхности, находящийся внутри s, так, чтобы при этом площадь этого куска уменьшилась. Но тогда и общая площадь поверхности, заключенной внутри S, должна была бы уменьшиться, что противоречит определению минимальной поверхности. Если теперь мы будем стягивать малую кривую s к какой-нибудь точке минимальной поверхности, то можно ожидать, что путем предельного перехода мы придем к таким свойствам минимальной поверхности, которыми она обладает лишь в окрестности своих точек.

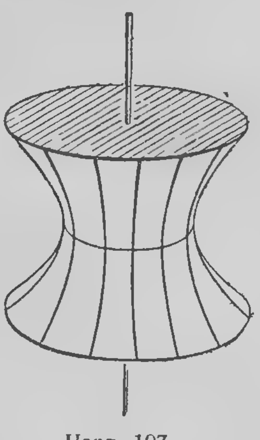
Всякая задача определения кривых или поверхностей при посредстве какого-нибудь минимального свойства называется вариационной задачей. Рассмотрение, аналогичное тому, которое мы провели для минимальных поверхностей, показывает также и для всякой другой вариационной задачи, что минимальное свойство может быть заменено некоторым свойством ближайшей окрестности точки. Выполнение такого рода предельных переходов составляет предмет вариационного исчисления. Таким образом вариационное исчисление и диференциальная геометрия идут противоположными путями. В то время как диференциальная геометрия кладет в основу свойства окрестностей и, исходя из них, делает определенные утверждения относительно общего поведения какого-нибудь геометрического образа, в вариационном исчислении получают свойства ближайшей окрестности из свойств, которыми обладает данный образ в целом.

Вариационное исчисление имеет основное значение для теоретической физики. Все встречающиеся в природе состояния равновесия и движения характеризуются минимальными свойствами.

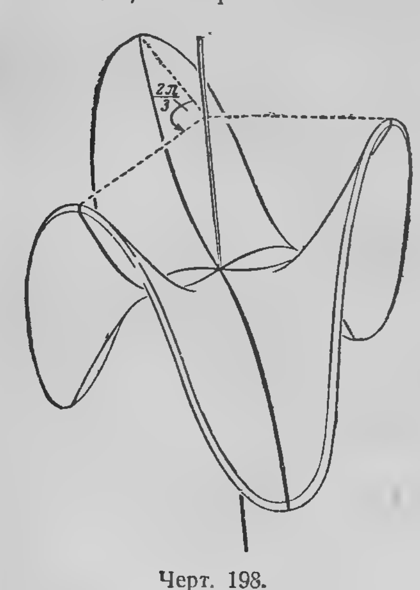
При помощи мыльной пленки можно получать также и такие минимальные поверхности, которые ограничены более чем одной кривой. Так, например, можно исходить из двух кольцеобразных замкнутых проволок, которые кладутся в мыльный раствор и затем, после извлечения из раствора, оттягиваются одна от другой так, что при этом оба кольца сохраняют одну и ту же общую ось. Тогда между обоими кольцами натягивается поверхность, имеющая вид, сходный с видом гиперболоида (черт. 197 и 220, стр. 186), причем из соображений симметрии можно ожидать, что эта поверхность есть поверхность вращения. Вычисление подтверждает это и показывает, что меридианами этой минимальной поверхности вращения служат цепные линии, т. е. линии, которые имеют такую форму, какую принимает под влиянием силы тяжести цепь, подве-

шенная в двух своих точках; по этой причине поверхность эта называется катеноидом.

Свойства точек округления и точек минимальных поверхностей соединяют в себе те параболические точки, в которых одновременно обращаются в нуль обе главные кривизны. В такой точке обращаются в нуль кривизны всех нормальных сечений. Очевидно, все точки плоскости суть точки такого рода, и вместе с тем плоскости представляют собой единственные поверхности, состоящие только из параболических точек округления. Пример такой изолированной параболической точки округления можно легко построить по аналогии с обыкновенным перевалом (черт. 190, стр. 165), если от перевала отходят не два, а три хребта и три склона, так что поверхность при повороте на угол $\frac{2\pi}{3}$ совпадает сама с собой (черт. 198). Очевидно, что в этом случае против каждого хребта расположен склон. Поэтому всякое нормальное сечение имеет здесь точку перегиба и, следовательно, нулевую кривизну. Поверхность подобного рода называется «обезьяньим седлом». Это название вызвано тем, что человек для верховой езды нуждается только в двух склонах седла, в то время как обезьяне нужен еще третий склон для хвоста.



Черт. 197.

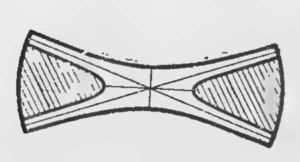


Черт. 198.

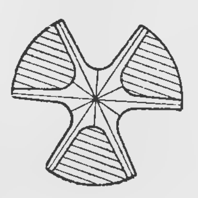
Различный вид поверхностей в эллиптических и гиперболических точках может быть охарактеризован еще другим способом, который оправдывает названия «эллиптический» и «гиперболический». Проведем на небольшом расстоянии от касательной плоскости параллельную ей плоскость и рассмотрим пересечение этой плоскости с поверхностью. В эллиптической точке поверхности сечение будет получаться лишь в том случае, когда эта параллельная плоскость расположена по определенную сторону от касательной плоскости. Сечение будет стягиваться к точке касания, когда расстояние между плоскостями будет стремиться к нулю. Если мы заставим стремиться к нулю это расстояние, но одновременно соответствующим образом будем увеличивать сечение во все большем масштабе, то увидим, что увеличенная кривая пересечения неограниченно приближается к некоторому эллипсу, расположенному в касательной плоскости, имеющему центр в точке касания, осями которого служат направления кривизн. При

этом длины осей относятся как корень квадратный из отношения главных радиусов кривизны.

Если мы рассмотрим теперь плоскости, параллельные касательной плоскости в гиперболической точке, расположенные с одной определенной стороны ее, то получим при аналогичном предельном переходе гиперболу, у которой длины осей и их направления находятся в определенной связи с линиями кривизны и главными кривизнами, так же как и в случае эллиптической точки (черт. 199). Если мы сделаем то же самое с параллельными плоскостями, расположенными с другой стороны касательной плоскости, то получим вторую гиперболу, имеющую те же оси,



Черт. 199.



Черт. 200.

что и первая. Обе гиперболы кроме того имеют общие асимптоты, причем направления последних определяются асимптотическими направлениями в рассматриваемой точке поверхности. Конические сечения, построенные нами таким образом, называются индикатрисами Дюпена точки поверхности. В параболических точках соответствующий способ может приводить к различного рода кривым. В точках округления индикатриса Дюпена есть окружность. Это легко можно показать на шаре и на эллипсоиде. На обезьяньем седле индикатриса имеет примерно такой вид, как показано на черт. 200.

29. Сферическое изображение и гауссова кривизна. До сих пор мы характеризовали кривизну поверхностей двумя числами, именно главными кривизнами. Гаусс указал способ, который дает возможность представлять кривизну в каждой точке поверхности одним единственным числом, зависящим конечно от главных кривизн, подобно тому как мы это делали в случае пространственных кривых.

Проведем через центр некоторого единичного шара прямые, параллельные нормалям рассматриваемой поверхности. Примем одно из двух направлений нормали к поверхности в некоторой точке за положительное и распространим это соглашение о направлении нормали на все соседние точки нашего куска поверхности. Если теперь мы выберем такое же направление и на соответствующем диаметре шара, то каждой точке куска поверхности будет соответствовать определенная точка на поверхности шара, а именно конец диаметра; таким образом поверхность будет отображена на шар. Этот предложенный Гауссом способ называют сферическим изображением поверхности. Так как диаметры шара перпендикулярны к касательным плоскостям, проведенным через концы диаметра, то при гауссовом изображении нормаль в каждой точке поверхности имеет такое же направление, как и нормаль в соответствующей точке

сферического изображения; точно так же касательные плоскости к поверхности и шару параллельны. Сферическое изображение поэтому называется также изображением с помощью параллельных нормалей или же параллельных касательных плоскостей. Таким же способом можно отобразить поверхность не только на шар, но и на произвольную другую замкнутую поверхность при помощи параллельных касательных плоскостей. Такие обобщенные отображения играют известную роль в современной диференциальной геометрии.

При сферическом изображении одна и та же точка шара соответствует нескольким точкам поверхности тогда и только тогда, когда поверхность обладает несколькими параллельными и одинаково направленными нормалями. Как легко уяснить себе из наглядного представления и как это мы докажем более точно ниже, в ближайшей окрестности эллиптической или гиперболической точки поверхности нет параллельных нормалей (черт. 202, 203, стр. 175). Таким образом вблизи этих точек сферическое изображение взаимно однозначно.

Если мы проведем на куске поверхности замкнутую кривую k, то ей будет соответствовать на шаре некоторая замкнутая кривая k'. Рассмотрим теперь отношение площади G куска шаровой поверхности, заключенной внутри кривой k', к площади F куска поверхности, заключенного внутри кривой k, и будем стягивать кривую k, проведенную на поверхности, к точке P поверхности. При этом F и G будут становиться все меньше, и в пределе, когда кривая на поверхности будет стянута в точку, рассматриваемое отношение получит определенное предельное значение:

$$\lim_{F\to 0}\frac{G}{F}=K.$$

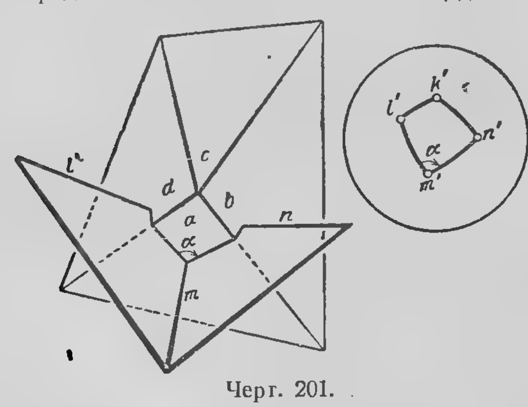
Определенное таким образом число K называется гауссовой кривизной поверхности в точке P. Аналитическое исследование показывает, что гауссова кривизна равна произведению соответствующих главных кривизн:

$$K=k_1k_2.$$

Гауссова кривизна обладает одним в высшей степени важным свойством: она не изменяется при любом изгибании куска поверхности. Под изгибанием понимают такую деформацию, которая оставляет неизменными длины и углы всех проведенных на поверхности кривых; поверхность, сделанная из какого-нибудь почти нерастяжимого материала, например из бумаги или из тонкой жести, может быть использована для наглядного представления изгибаний. Так как гауссова кривизна не изменяется при изгибании, то она должна находиться во внутренней связи с такими свойствами поверхности, которые зависят только от величины дуг и углов, проведенных на поверхности кривых. Поэтому гауссова кривизна и ее аналог для большего числа измерений играют решающую роль в теории относительности, которая как раз занимается исследованием таких «внутренних» свойств искривленных многомерных многообразий.

Постараемся уяснить, почему гауссова кривизна, определение которой все же существенно зависит от пространственного расположения поверхности, тем не менее остается неизменной при изгибании. Представим себе

телесный угол, составленный из жестких треугольных плоских пластинок (a, b, c, d на черт. 201), так что каждые две соседних пластинки могут вращаться вокруг общего ребра. Если телесный угол имеет более трех граней, то его форма может изменяться в пространстве, и эти изменения мы должны считать изгибанием, так как при этом длины и углы всех кривых, которые можно начертить на поверхности телесного угла, остаются неизменными. Если мы восставим перпендикуляры (l, m, n) к каждой из боковых граней, направленные во-вне, то придем к сферическому изображению телесного угла посредством отдельных точек (l', m', n') шара. Чтобы теперь установить аналогию со сферическим изображением поверхности, соединим дугами больших кругов те точки шара, которые отображают соседние боковые поверхности телесного угла. Таким образом мы получим на шаре некоторый многоугольник. И вот мы утверждаем, что при определенных выше изгибаниях площадь этого многоугольника не меняется.



Черг. 201.

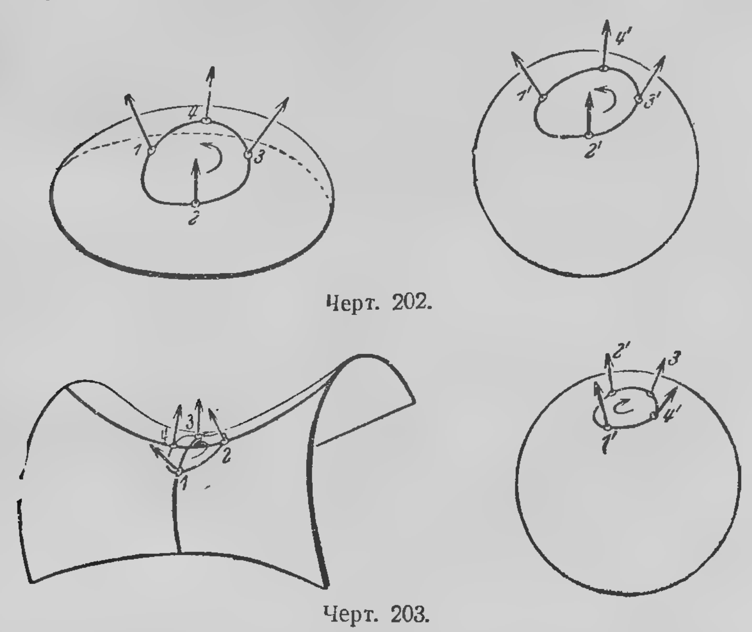
Этот факт, очевидно, аналогичен неизменности гауссовой кривизны при изгибании поверхности.

Наше утверждение легко доказать при помощи элементарных теорем сферической геометрии. Именно, известно, что площадь сферического треугольника, а равным образом и любого сферического многоугольника, составленного из дуг больших кругов, зависит только от суммы углов. Таким образом достаточно показать, что углы многоугольника, который мы построили для сферического изображения нашего телесного угла, не изменяются при изгибании. Из черт. 201 можно усмотреть, что каждый такой угол равен дополнению до 180° того угла, который образуют два соседних ребра телесного угла. Но по предположению все эти углы остаются неизменными.

Из проведенного выше рассмотрения можно вывести путем предельного перехода также и неизменность гауссовой кривизны, по крайней мере, если ограничиться выпуклыми кусками поверхности. Для этой цели следует аппроксимировать нашу поверхность вписанными многогранниками, составленными из треугольников с малыми длинами ребер, и применить наше рассуждение к каждому телесному углу такого многогранника.

Теперь посмотрим, как можно охарактеризовать разницу между эллиптическими, гиперболическими и параболическими точками поверхности при помощи сферического изображения и гауссовой кривизны. Если обходить эллиптическую точку по малой замкнутой, не имеющей двойных точек кривой, проведенной на поверхности, то и на шаре мы получим точно так же замкнутую кривую, не имеющую двойных точек (черт. 202). Точно так же и для седлообразной точки сферическое изображение кривой будет свободно от двойных точек (черт. 203). Как показывают

черт. 202 и 203, в случае гиперболической точки направление обхода кривой на шаре обратно направлению обхода на кривой, проведенной на поверхности, между тем как для эллиптической точки оба направления обхода совпадают. В аналитической геометрии принято обозначать площадь кусков поверхностей одинаковыми или обратными знаками, в зависимости от того, совпадает ли направление обхода граничной кривой для обоих кусков поверхности или же эти направления противоположны. Соответственно с этим гауссова кривизна выпуклых кусков поверхности считается положительной, а седлообразных — отрицательной. К тому же самому обозначению в смысле знака мы приходим, если будем исходить из обеих главных кривизн. Именно: в эллиптических точках



Черт. 202.

Черт. 203.

центры кривизны, соответствующие главным кривизнам, лежат на одной и той же стороне нормали, между тем как в гиперболических точках они расположены на противоположных по отношению к поверхности сторонах нормали. Следовательно, если мы будем считать направление нормалей по одну сторону от поверхности положительным, а по другую сторону отрицательным, то произведение обоих радиусов главных кривизн — а значит, и произведение главных кривизн и гауссова кривизна — будет положительным для эллиптических точек и отрицательным для гиперболических точек. Так как изображение достаточно малых замкнутых кривых, не имеющих двойных точек, тоже не имеет двойных точек, то сферическое изображение достаточно малых всюду выпуклых или всюду седлообразных кусков поверхностей всегда взаимно однозначно.

Параболические точки занимают среднее положение между эллиптическими и гиперболическими точками; поэтому следует ожидать, что гауссова кривизна в параболических точках равна нулю. Это предположение

оправдывается. В самом деле, параболические точки характеризуются тем, что в этих точках одна из главных кривизн равна нулю, а значит, в этих точках произведение главных кривизн, т. е. гауссова кривизна, обращается в нуль.

Плоскость состоит только из параболических точек. Следовательно, из постоянства гауссовой кривизны при изгибании вытекает, что невозможно наложить плоский лист бумаги на положительно или отрицательно искривленный кусок поверхности. И, действительно, можно непосредственно убедиться, что в первом случае на бумаге образуются складки, во втором случае — разрывы.

Черт. 204.

Рассмотрим теперь поверхность, не состоящую целиком из параболических точек, но такую, на которой имеются точки как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. Так как гауссова кривизна изменяется на поверхности непрерывно, то на этой поверхности должны быть точки, для которых гауссова кривизна обращается в нуль, и такие точки должны образовать непрерывные кривые, отделяющие области положительной гауссовой кривизны от областей отрицательной кривизны. Такие кривые, состоящие из параболических точек, называются параболическими кривыми поверхности [1]). Конечно, параболические кривые должны существовать лишь в тех случаях, когда гауссова кривизна поверхности имеет как положительное, так и отрицательное значение. На поверхностях, рассмотренных нами до сих пор, это ни разу не имело места. Поверхности второго порядка либо имеют всюду положительную кривизну, как, например, эллипсоид, либо всюду отрицательную кривизну, как однополостный гиперболоид, или же на них гауссова кривизна всюду равна нулю, как, например, на цилиндре и на конусе, которые можно

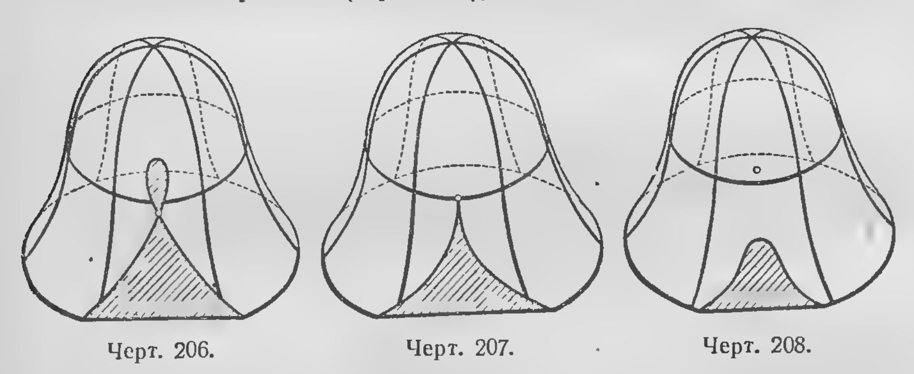
1) Клейн подверг своеобразному исследованию параболические кривые. Он допустил, что художественная красота лица имеет в основе определенные математические соотношения, и в связи с этим нарисовал все параболические кривые, на Аполлоне Бельведерском, линии лица которого представляют высшую степень классической красоты. Однако эти кривые, во-первых, не имеют простого вида, а во-вторых, не удалось обнаружить закона, которому они подчиняются (черт. 204).

получить из плоского листа бумаги. Наконец минимальные поверхности не имеют ни в одной точке положительной кривизны.

Теперь мы укажем примеры поверхностей, обладающих параболическими кривыми, и рассмотрим их сферическое изображение. Одну из самых простых поверхностей подобного рода представляет поверхность колокола. Эту поверхность можно получить путем вращения плоской кривой, имеющей точку перегиба, вокруг оси, лежащей в ее плоскости (черт. 205). Будем считать ось вращения вертикальной. Для случая, изображенного на черт. 205, ветвь кривой, расположенная выше точки перегиба, образует часть поверхности с эллиптической кривизной, а нижняя часть кривой образует часть поверхности с гиперболической кривизной. Таким образом окружность, образуемая точкой перегиба при вращении кривой, есть параболическая кривая колокола. Это можно усмотреть также из поведения касательных плоскостей. Касательные плоскости в гиперболических точках пересекают колокол по петлеобразной кривой, образующей две ветви, проходящие через точку касания (черт. 206). Если точка касания приближается к параболической кривой снизу, то замкнутая часть петли становится все меньше и обе ветви сечения, проходящие через точку касания, образуют в этой точке все более острый угол. Наконец, когда точка касания ляжет на параболической кривой (черт. 207), петля стянется в точку касания, а кривая образует острие в этой точке. Если точка касания движется дальше в сторону эллиптической части поверхности (черт. 208), то кривая пересечения состоит из



Черт. 205.

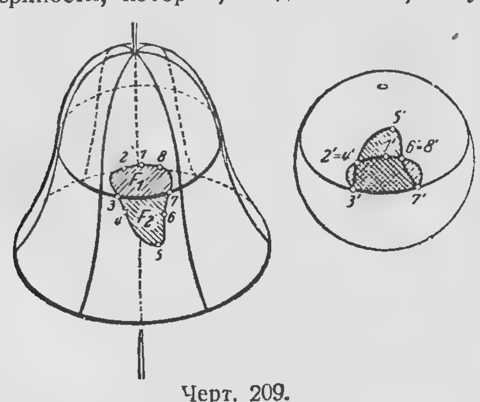


Черт. 206. Черт. 207. Черт. 208.

точки касания как изолированной точки и непрерывной ветви кривой, расположенной целиком в гиперболической части поверхности. Таким образом попутно мы получили примеры для перечисленных выше (стр. 158) случаев особых точек плоских кривых.

Рассмотрим теперь сферическое изображение колокола вблизи параболической окружности (черт. 209). Окружим произвольную точку параболической кривой достаточно малой замкнутой кривой *123456781*, внутри которой будет заключен определенный кусок поверхности *F*. Пусть точки *1* и *5* будут высшей и низшей точками *F*. Пусть наша кривая

встречает параболическую окружность в точках 3 и 7. Меридиан, т. е. та кривая, при вращении которой мы получили колокол, в окрестности ее точки перегиба имеет параллельные касательные (стр. 157). Очевидно, соответствующие точки колокола имеют параллельные нормали и, следовательно, один и тот же образ на сфере. Следовательно, каждой окружности, расположенной параллельно параболической окружности и несколько выше нее, должна соответствовать вторая окружность, расположенная несколько ниже параболической и имеющая то же самое сферическое изображение. Отсюда мы видим, что сферическое изображение куска поверхности не взаимно однозначно. Для того чтобы сделать это обстоятельство наглядным, возьмем точки 2, 4, 6, 8 на границе F так, чтобы точки 2 и 4, а также 6 и 8 имели параллельные нормали. Параболическая окружность делит площадку F на две области F_1 и F_2, внутренность которых состоит целиком из эллиптических и, соответственно, гиперболических точек поверхности, которые, следовательно, могут быть взаимно однозначно отображены на две области шара. Общей границей этих двух областей служит изображение дуги параболической окружности, которая, очевидно, и на шаре представляет дугу окружности, расположенную в горизонтальной плоскости. Но в то время как F_1 и F_2 расположены по разные стороны от параболической окружности, их изображения на шаре оба расположены выше изображения параболической окружности. Отсюда следует, что они перекрываются. Граница площадки F изображается в виде кривой $1'2'3'4'5'6'7'8'1'$, причем точка $2'$ совпадает с точкой $4'$, а точка $6'$—с точкой $8'$, и изображающая кривая пересекает сама себя в этих точках.

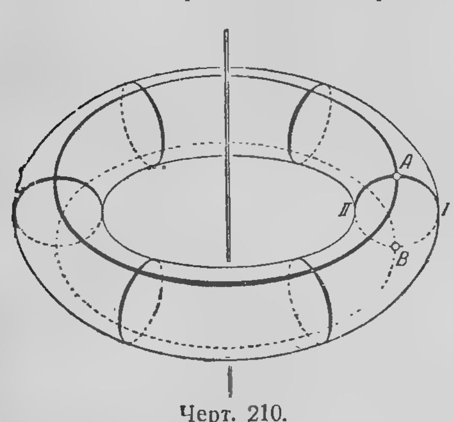


Черт. 209.

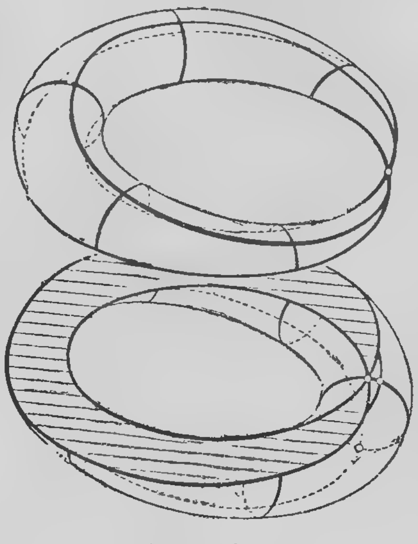
Таким образом сферическое изображение колокола выворачивается вдоль изображения параболической кривой. Такое выворачивание имеет место, как правило, для параболических кривых любых поверхностей. Однако имеется характерное исключение, которое мы поясним на другом примере.

Проведем через вертикальную ось произвольную плоскость, начертим на ней окружность, не пересекающую ось, и будем затем вращать плоскость вокруг оси. Тогда окружность опишет некоторую поверхность вращения, называемую тором (черт. 210). Окружность делится верхней точкой A и нижней точкой B на две полуокружности I и II. Часть тора, образуемая полуокружностью I, очевидно, обладает положительной гауссовой кривизной, а часть, образованная полуокружностью II, — отрицательной. Обе части тора отделяются одна от другой окружностями, которые описываются точками A и B. Эти окружности — параболические кривые нашей поверхности. Всякая касательная плоскость, проведенная к тору в какой-нибудь точке одной из этих окружностей, имеет с тором единственную общую ветвь кривой, проходящую через точку касания,

так как, очевидно, такая касательная плоскость соприкасается с тором вдоль целой окружности и не встречает поверхности тора в других точках. Таким образом здесь мы имеем пример параболической точки, в которой касательная плоскость в сечении с поверхностью не образует кривой, обладающей точкой заострения. На черт. 211 изображена кривая, полученная от пересечения с поверхностью тора касательной плоскости в гиперболической точке тора, соседней с параболической кривой.



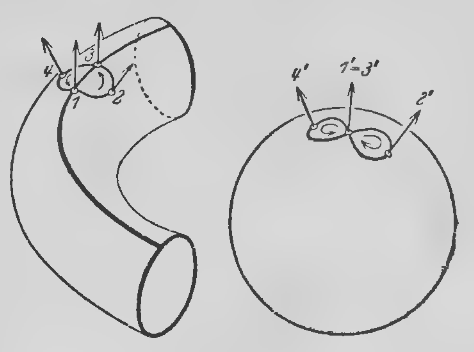
Черт. 210.



Черт. 211.

В эллиптических точках тора касательная плоскость имеет с тором только одну общую точку, именно точку касания.

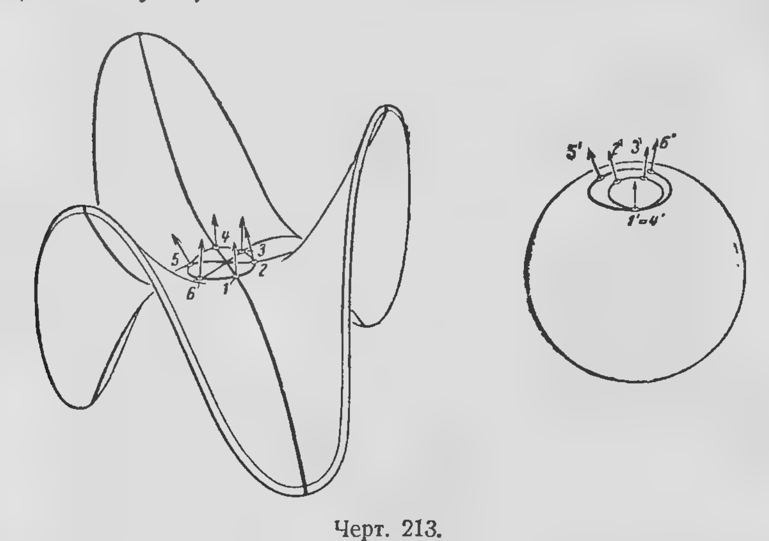
Рассмотрим теперь сферическое изображение тора. Вообразим, что в каждой точке поверхности выбрано направление нормали, именно во внешнюю сторону от поверхности. Тогда обе параболические окружности, которые обладают только параллельными нормалями, отобразятся на шар каждая в одну точку, именно в верхнюю и нижнюю точки шара. Эллиптическая часть тора не имеет параллельных нормалей. Ее сферическое изображение, как легко видеть, покрывает сплошь весь шар, притом однократно, за исключением высшей и низшей точек шара. Но то же самое имеет место и для гиперболической части. Таким образом шар дважды покрывается сферическим изображением тора за исключением верхней и нижней точек шара, в которых обе части изображения связаны. Чтобы сделать наглядным этот вид связи, поступим так же, как в предыдущем примере. Представим себе, что мы рассматриваем тор и



Черт. 212.

его сферическое изображение сверху под некоторым углом (черт. 212) и окружим параболическую точку тора достаточно малой замкнутой, не имеющей двойных точек кривой *12341*. Выбор этой точки и вид сферического изображения кривой можно усмотреть непосредственно из чертежа. То, что сферическое изображение выглядит наподобие восьмерки, соответствует тому факту, что в эллиптической области направление обхода сохраняется, между тем как в гиперболической области направление обхода изменяется на обратное.

Наш пример характерен для того случая, когда поверхность соприкасается с одной и той же плоскостью вдоль некоторой (непременно параболической) дуги кривой. Наоборот, пример с колоколом иллюстрирует наглядно тот случай, когда касательная плоскость меняется вдоль параболической кривой. В обоих примерах параболическая кривая отделяет на поверхности область с положительной гауссовой кривизной от области с отрицательной гауссовой кривизной.

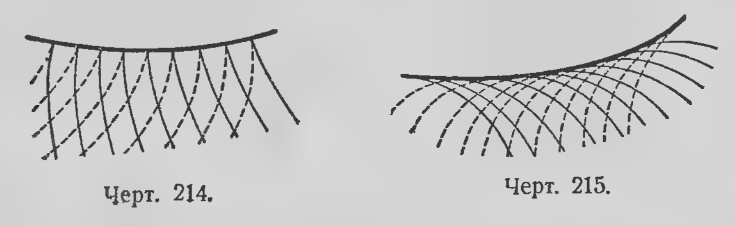


Черт. 213.

В качестве последнего примера рассмотрим поверхность с параболической точкой, расположенной изолированно в некоторой области поверхности, которая в других точках искривлена седлообразно (черт. 213). Такой пример дает описанное на стр. 171 обезьянье седло. Очевидно, что для этой поверхности параллельными нормалями обладают те точки, которые расположены диаметрально противоположно по отношению к параболической точке. Следовательно, замкнутой, не имеющей двойных точек кривой, проведенной вокруг этой точки, соответствует на шаре замкнутая кривая, дважды обходящая сферическое изображение этой точки. Очевидно, можно таким же образом построить изолированные параболические точки с седлообразной окрестностью, для которых сферические изображения кривой, окружающей параболическую изолированную точку, обходят соответствующую точку на шаре три раза и вообще произвольное число раз. Если, наоборот, исходить из изолированной параболиче-

ской точки, окрестность которой имеет эллиптическую кривизну, то можно показать, что сферическое изображение ведет себя так, как если бы кривизна была всюду эллиптической и никакой параболической точки вовсе не было бы.

В заключение покажем, как ведут себя линии кривизны и асимптотические линии при сферическом изображении. Сферическое изображение дает возможность полностью охарактеризовать направление главных кривизн. Именно, это — единственные направления, параллельные направлениям своих изображений. Только в случае точек округления этот критерий недействителен, — для этих точек все направления параллельны направлениям изображений. В случае эллиптических точек оба направления главных кривизн направлены одинаково со своими изображениями или, при другом



Черт. 214. Черт. 215.

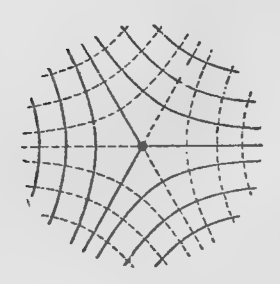
выборе направления нормали, оба направления противоположны направлениям изображений, между тем как для гиперболических точек всегда одно из направлений кривизны одинаково со своим сферическим изображением, а другое противоположно ему.

Этот критерий позволяет легко определить линии кривизны поверхностей вращения. Мы утверждаем, что это суть параллели и меридианы поверхностей вращения. Действительно ясно, что оба эти семейства кривых переходят в систему параллелей и меридианов на шаре и притом так, что всякое направление параллельно направлению своего изображения. Оба полюса выпуклой замкнутой поверхности вращения поэтому всегда суть точки округления.

Асимптотические направления обладают другим свойством. Именно, они перпендикулярны к своему сферическому изображению, и притом это — единственные направления такого рода. Направления вращения, в которых мы должны вращать асимптотические направления в касательной плоскости, для того чтобы получить направления изображений, всегда противоположны для обоих асимптотических направлений. Это связано с тем обстоятельством, что сферическое изображение всегда обращает направление движения для седлообразно искривленных поверхностей.

Так как асимптотические линии проходят только по гиперболической части поверхности, то они должны обнаруживать особенности вблизи параболических кривых. В случае когда параболические кривые имеют изменяющиеся касательные плоскости, как, например, на колоколе, асимптотические линии имеют точки заострения вдоль параболической кривой (черт. 214). Наоборот, если все точки параболической кривой имеют одну и ту же касательную плоскость, как у тора, параболическая кривая служит огибающей асимптотических линий, т. е. она касается в каждой из своих точек асимптотической линии (черт. 215). Поведение асимптотических линий

на обезьяньем седле характеризует черт. 216. Если обход по замкнутой кривой вокруг точки такого рода превращается в n — 1-кратный обход на сферическом изображении, то через эту точку проходят в точности n асимптотических линий.



Черт. 216.

30. Развертывающиеся поверхности. Линейчатые поверхности. До сих пор при рассмотрении параболических точек мы исключали тот случай, когда поверхность состоит исключительно из параболических точек. Теперь этот случай должен быть подробно рассмотрен ввиду его исключительной важности.

Примерами подобных поверхностей могут служить все те поверхности, которые получаются из куска плоскости путем его изгибания. Теперь мы выскажем общую теорему, гласящую, что две поверхности могут быть путем изгибания переведены одна в другую тогда, когда на обеих поверхностях гауссова кривизна имеет всюду одно и то же *постоянное* значение[1]).

Согласно этой теореме можно получать путем изгибания куска плоскости все поверхности с гауссовой кривизной, всюду равной нулю. В связи с подобным способом получения эти поверхности называются также «развертывающимися поверхностями».

Существует еще два иных способа получения развертывающихся поверхностей. Прежде всего развертывающимися поверхностями являются все те поверхности, которые являются огибающими семейства плоскостей с одним параметром. Переменная плоскость семейства касается подобной поверхности вдоль всей прямой. Эту прямую можно получить путем предельного перехода из прямой пересечения рассматриваемой плоскости семейства с одной из соседних плоскостей семейства. Эта прямая есть параболическая прямая поверхности, так как поверхность вдоль всей прямой имеет одну и ту же касательную плоскость. Так как кроме того совокупность таких прямых покрывает всю поверхность, то последняя действительно должна состоять только из параболических точек. Замечательно, однако, что имеет место и обратное положение, так что таким способом можно получить все развертывающиеся поверхности. Вследствие этого развертывающиеся поверхности суть вместе с тем линейчатые поверхности[2]).

Так как три плоскости всегда имеют точку пересечения[3]), то ясно, что соседние образующие развертывающейся поверхности всегда пересекаются. Это можно доказать аналитически, и это дает третий способ

---

[1]) Для поверхностей с переменной гауссовой кривизной не существует столь же простого достаточного условия того, что эти поверхности могут быть переведены одна в другую путем изгибания. Необходимо, чтобы поверхности можно было так отобразить одну на другую, чтобы они в соответствующих точках обладали одинаковой гауссовой кривизной. Однако этого условия недостаточно. Это легко выяснить на примере поверхностей вращения.

[2]) В противоположность этому в четырехмерном пространстве существуют развертывающиеся поверхности, не являющиеся линейчатыми.

[3]) При этом параллельность следует представлять как пересечение в бесконечности.

получения развертывающихся поверхностей. Именно, точки пересечения соседних прямых описывают кривую, и здесь оправдывается наглядное представление, что эта пространственная кривая должна не пересекаться, а соприкасаться с образующей. Таким образом мы можем определить развертывающиеся поверхности как поверхности, которые образуются касательными к произвольной пространственной кривой. Эти поверхности вместе с тем огибаются соприкасающимися плоскостями кривой. Только конус и цилиндр должны быть исключены из такого представления, между тем как при помощи предыдущего способа можно получить и их.

Второй способ позволяет непосредственно определить сферические изображения всех развертывающихся поверхностей за исключением плоскости. Именно, огибающими плоскостями являются касательные плоскости поверхности. Эти плоскости, а также и направления нормалей к ним образуют семейства, зависящие только от одного переменного параметра. Таким образом сферическое изображение развертывающейся поверхности всегда представляет кривую, а именно индикатрису бинормалей пространственной кривой, касательные к которой образуют поверхность. То, что сферическое изображение поверхностей с нулевой кривизной приводится к кривой, можно было ожидать также на основании нашего первоначального определения гауссовой кривизны, в силу которого сферическое изображение всякого такого куска поверхности имеет площадь, равную нулю.

Развернем теперь поверхность, образуемую касательными какой-нибудь пространственной кривой на плоскость. Тогда пространственная кривая должна перейти в плоскую кривую, а прямые, образующие поверхность, должны перейти в касательные к этой плоской кривой. Всякой дуге пространственной кривой соответствует дуга плоской кривой той же длины. Но кроме того можно показать, что обе кривые в соответствующих точках имеют также одинаковую кривизну[1]).

Если исходить, обратно, из некоторой плоской выпуклой дуги кривой s и вырезать кусок плоскости внутри кривой, то оставшаяся часть плоскости может быть так изогнута, что пространственная кривая, в которую переходит дуга s, сохраняет во всех точках кривизну плоской кривой. При этом можно аналитически доказать, что эта пространственная кривая может иметь любое кручение. Подобное изменение формы пространственной кривой, при котором длина дуги и кривизна сохраняются, в то время как кручение изменяется, называется кручением пространственной кривой.

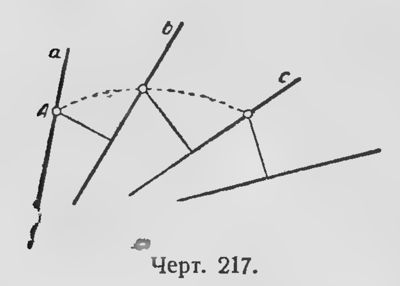
При нашем изгибании плоскости, очевидно, касательные к кривой s остаются все время прямолинейными, в то время как все другие прямые начальной плоскости изгибаются[2]). Однако при этом обнаруживается,

---

[1]) Это можно наглядно представить. В самом деле, угол между двумя соседними касательными не изменяется при изгибании, а кривизна есть предел отношения этого угла к соответствующей дуге.

[2]) При совершенно произвольном изгибании куска плоскости конечно изменяется также и кривизна дуги s. Для того чтобы кривизна дуги кривой s сохранялась неизменной, не только необходимо, но и достаточно, чтобы касательные к кривой s оставались прямолинейными. Поэтому мы получаем подходящую модель, если вырежем плоский кусок из бумаги и закрепим некоторые полукасательные кривой s путем приклеивания палочек.

что при изгибании куска плоскости мы не получаем всей поверхности, образуемой касательными пространственной кривой t, которая возникает из кривой s. Поверхность, которую мы построили, содержит только одну полупрямую всех касательных кривой t, полупрямую, ограниченную точкой касания. Если мы продолжим эти полукасательные до полной прямой, то по учим другую часть поверхности, которая вместе с первой частью образует поверхность касательных к кривой t. Обе части поверхности встречаются по кривой t, образующей острое ребро, которое называется ребром возврата поверхности. Если теперь снова закручивать кривую t непрерывно в кривую s, то обе части все теснее соприкасаются одна с другой и наконец согпадают на плоскости кривой s. Можно получить целиком поверхность, образуемую касательными к кривой t, если внешнюю часть плоскости кривой s в двух экземплярах наложить одну на другую, сложить их по кривой s и затем при кручении кривой s отделить обе части. При этом существенно, чтобы кривизна кривой s нигде не обращалась в нуль. Если исходить при этом из кривых с точками перегиба, то поверхность касательных вообще состоит из четырех листков, встречающихся в точке перегиба, из которых два связаны вдоль касательной в точке перегиба.



Черт. 217.

Теперь обратимся к линейчатым поверхностям, которые не являются развертывающимися. Согласно сказанному выше это должны быть те поверхности, у которых две соседних образующих расположены в различных плоскостях. В самом деле, поверхность будет развертывающейся тогда и только тогда, когда соседние образующие пересекаются.

Само собой напрашивающееся обобщение рассуждений, которые для каждой развертывающейся поверхности привели к определению расположенной на этой поверхности кривой — ребра возврата, позволяет определить для всякой иной линейчатой поверхности соответствующую кривую — «горловую» или «стрикционную линию». А именно, выберем из семейства прямых, расположенных на поверхности, две образующие a и b и проведем общий перпендикуляр к ним (черт. 217). Как известно, этот перпендикуляр представляет кратчайшее расстояние между прямыми a и b. Пусть основанием этого перпендикуляра на прямой a будет точка A. Если выбирать прямую b пучка все ближе к a, то точка A стремится к некоторому предельному положению, которое называется горловой точкой прямой a. Оно соответствует точке, в которой образующая развертывающейся поверхности пересекается с соседней образующей и с ребром возврата.

Горловая линия есть кривая, описываемая горловой точкой, когда прямая a пробегает все образующие поверхности. Было бы ошибочным заключить, что горловая линия ортогональна ко всем образующим. Ведь если a, b, c — три соседних образующих (черт. 217), то, вообще говоря, основание общего перпендикуляра к b и c на прямой b отлично от основания общего перпендикуляра к b и a. Поэтому линия, соеди-

няющая горловые точки, не имеет непременно направления, совпадающего с направлением общего перпендикуляра, а потому и не должна обязательно ортогонально пересекаться с образующими. Так, например, горловой линией однополостного гиперболоида вращения служит окружность, которая, очевидно, ни в одной точке не перпендикулярна к образующим гиперболоида.

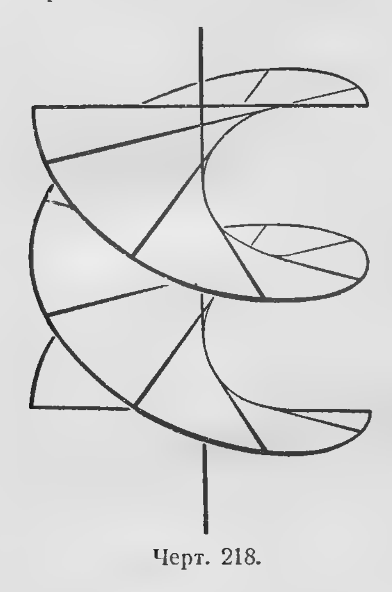
Линейчатые поверхности представляют многообразие прямых с одним параметром, поэтому они имеют аналогию с пространственными кривыми, которые представляют многообразие точек с одним параметром. Так, для линейчатых поверхностей можно ввести понятие, аналогичное понятию кривизны пространственных кривых, а именно так называемое закручивание (Windung). Если мы разделим угол между двумя образующими на их кратчайшее расстояние, то закручиванием называют предел, к которому стремится это отношение при слиянии образующих.

Закручивание характеризует изменение положения касательной плоскости вдоль прямых, образующих линейчатую поверхность. Очевидно, касательная плоскость при движении точки касания вдоль такой прямой может вращаться только вокруг этой прямой, так как она должна всегда содержать ее. Как можно показать аналитически, положение касательной плоскости в точке P образующей целиком определяется касательной плоскостью в горловой точке A прямой a, расстоянием PA и закручиванием линейчатой поверхности вокруг a. Распределение касательных плоскостей можно описать следующим образом: по мере того как точка P прямой a, начиная от точки A, непрерывно удаляется в бесконечность в одном и том же направлении, угол, образуемый касательной плоскостью в точке P с касательной плоскостью в точке A, непрерывно растет, стремясь к прямому углу. Касательные плоскости, с другой стороны, от точки A ведут себя соответственно и симметрично по отношению к горловой точке A. Если две точки P и Q прямой лежат по обе стороны от точки A на равном расстоянии, то касательная плоскость в точке A делит пополам угол между касательными плоскостями, проведенными в точках P и Q.

Отсюда следует: если две линейчатые поверхности имеют одинаковое закручивание вдоль одной из образующих, то их можно так наложить одна на другую, что обе эти образующие совпадают друг с другом и кроме того поверхности всюду касаются друг друга вдоль этих образующих. При этом следует только позаботиться о том, чтобы горловые точки и касательные плоскости в них налагались, тогда возможно вращать одну поверхность по отношению к другой на два прямых угла так, что горловины и касательные плоскости в них остаются совпадающими. Это обстоятельство имеет большое значение для кинематики (§ 43).

Развертывающиеся поверхности можно характеризовать различным способом по их закручиванию. Именно, очевидно, что цилиндры тождественны с теми поверхностями, на которых закручивание равно нулю, ибо соседние образующие образуют друг с другом угол, равный нулю. Напротив, конусы и поверхности, образуемые касательными к пространственным кривым, имеют бесконечное закручивание, ибо соседние образующие у этих поверхностей находятся друг от друга на расстоянии, равном нулю.

Сферическое изображение развертывающихся поверхностей мы уже определили. Для линейчатых поверхностей с конечным закручиванием сферическое изображение оказывается весьма простым. Нормали во всех точках прямой, расположенной на линейчатой поверхности, параллельны определенной плоскости, именно нормальной плоскости этой прямой. Поэтому сферическое изображение этой прямой во всяком случае представляет дугу большого круга. Нормаль непрерывно вращается на прямой угол каждый раз, когда основание ее, начиная от горловины, удаляется в обе стороны по прямой в бесконечность. Таким образом сферическое изображение прямой есть полуокружность. Обеим концевым точкам полуокружности соответствуют бесконечно удаленные точки прямой, а сферическое изображение горловой точки делит пополам полуокружность.



Черт. 218.

В заключение построим одну, особенно простую линейчатую поверхность постоянного закручивания (черт. 218). Естественно опять выбрать за горловую линию прямую, перпендикулярную ко всем образующим поверхности. Пусть d есть постоянное закручивание нашей поверхности, a и b—две образующие, расположенные под углом α друг к другу и пересекающие горловую прямую в точках A и B. Тогда имеет место соотношение:

$$\alpha = AB \cdot d.$$

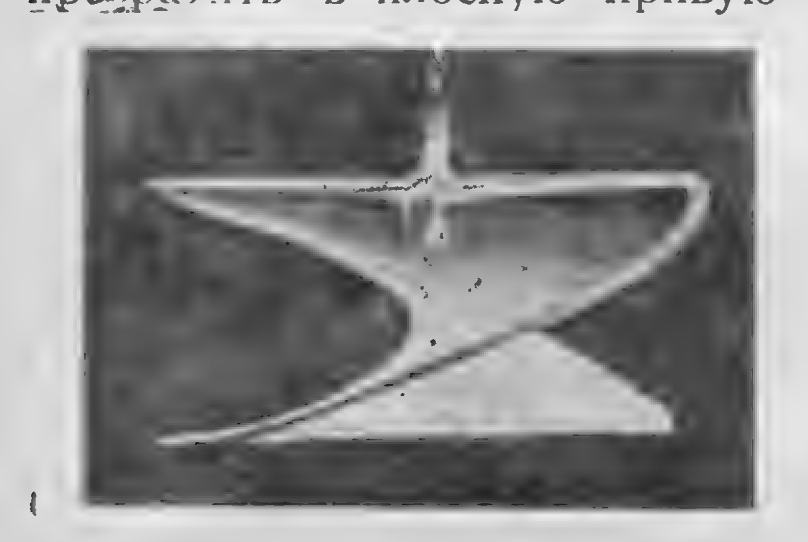
Отсюда следует, что поверхность переходит сама в себя, если завинчивать ее вокруг горловой прямой, как вокруг оси, на один винтовой ход, равный d. Вследствие такого свойства эту поверхность называют винтовой поверхностью. Винтовую поверхность наиболее общего вида можно получить, если завинчивать произвольную пространственную кривую равномерно вокруг оси, заставляя ее принимать всевозможные положения. Таким образом наша специальная линейчатая винтовая поверхность получается в том случае, если выбрать в качестве образующей кривой прямую, пересекающую ось под прямым углом. Эта поверхность называется винтовой поверхностью в узком смысле слова.

Аналитическое рассмотрение показывает, что винтовая поверхность представляет минимальную поверхность (черт. 219). Выше мы уже приводили (стр. 170) пример минимальной поверхности, именно катеноид (черт. 220). Обе эти поверхности тесно связаны одна с другой. Винтовую поверхность можно путем изгибания превратить в катеноид. При этом необходимо винтовую поверхность налагать на поверхность вращения бесконечное число раз, подобно тому как мы получаем круговой цилиндр из плоскости. При этом винтовая ось должна наложиться на

самую малую параллель поверхности, а прямые линейчатой поверхности переходят в меридианы[1]).

Ниже мы рассмотрим винтовые поверхности с более общей точки зрения и установим их связь с поверхностями вращения.

31. Кручение пространственных кривых. Теория развертывающихся поверхностей дала нам способ так изменять пространственные кривые, чтобы длина и кривизна дуги сохранялись неизменными, а изменялось бы лишь кручение. В частности, путем закручивания можно всякую пространственную кривую t превратить в плоскую кривую s,



Черт. 219.



Черт. 220.

причем вид кривой s целиком определяется кривой t; в самом деле, на кривой s кривизна определяется как функция длины дуги, и отсюда в соответствии со сказанным в § 26 вид кривой s определяется однозначно. Оказывается, что между кривыми s и t существует замечательная связь.

Теория геодезической кривизны — понятие, с которым мы ближе ознакомимся позже, — дает простое неравенство, которое мы используем в дальнейшем (черт. 221а, б). Пусть кривая t лежит на развертывающейся поверхности, и мы переводим эту кривую в плоскую кривую t' таким образом, что развертываем нашу поверхность на плоскость; тогда кривизна k' кривой t' никогда не превышает, а вообще меньше, чем кривизна k в соответствующих точках кривой t. Пусть α есть угол, образуемый соприкасающейся плоскостью кривой t с соответствующей касательной плоскостью развертывающейся поверхности; тогда имеет место соотношение:

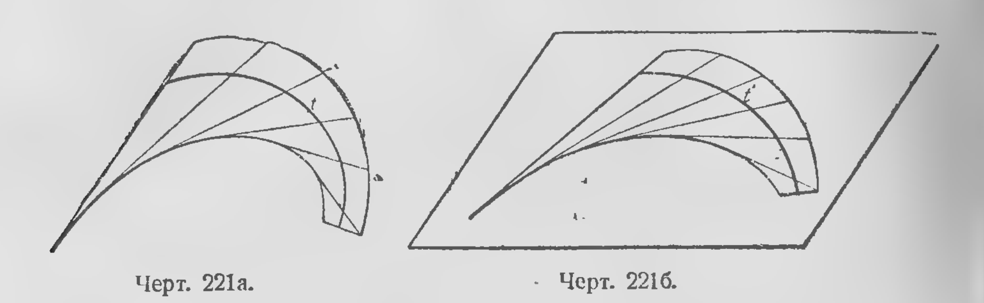
$$k' = k \cos \alpha.$$

Эта вспомогательная теорема позволяет вывести замечательную теорему: *при всяком закручивании плоской выпуклой дуги кривой все хорды возрастают.*

---

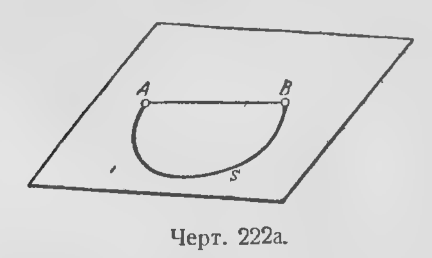
1) Следует обратить внимание на то, чтобы при изгибании винтовая ось не переходила в ось вращения, а переходила бы в некоторую окружность, перпендикулярную к ней. В соответствии с этим на черт. 219 и 220 ось геликоида взята вертикальной, а ось катеноида — горизонтальной.

Для доказательства рассмотрим плоскую выпуклую дугу кривой s с концевыми точками A, B (черт. 222а). Пусть при закручивании кривой s получается дуга пространственной кривой t с концами C, D. Требуется доказать, что прямолинейный отрезок CD длиннее, чем отрезок AB.

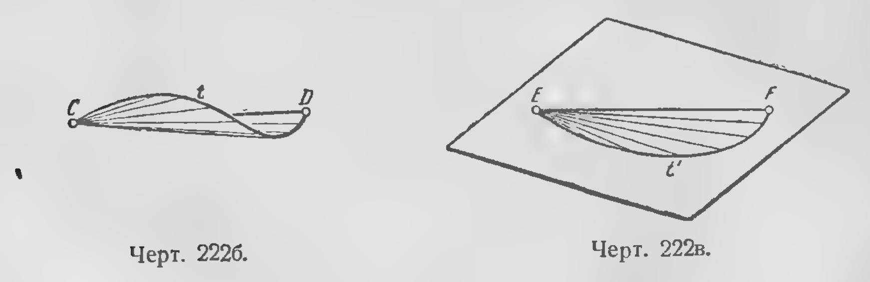


Черт. 221а. Черт. 221б.

Проведем через дугу t конус с вершиной в точке C (черт. 222б). Развернем этот конус на плоскость кривой s. Тогда кривая t превратится в плоскую кривую t' с концами E, F (черт. 222в). Отрезки EF и CD равны, так как CD представляет образующую нашего конуса и поэтому при развертывании остается прямолинейной и отображается с сохранением длины на прямую EF. Теперь нам остается еще показать, что EF длиннее, чем AB. Но дуги s и t' имеют равную длину, и согласно нашей вспомогательной теореме кривизна t' всюду меньше кривизны t в соответствующих точках и, следовательно, меньше кривизны s. Значит, мы можем перевести дугу s в дугу t', если мы, оставляя точку A неподвижной, при неизменной длине дуги будем всюду уменьшать кривизну s. Из



Черт. 222а.

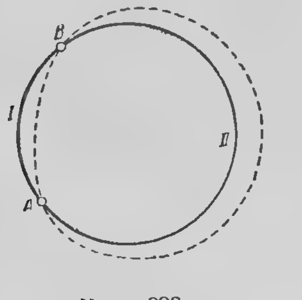


Черт. 222б. Черт. 222в.

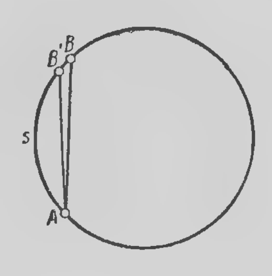
выпуклости s наглядно видно, что при нашей деформации точка B будет все больше удаляться от точки A. Это легко проверить аналитически. Таким образом неравенство $EF > AB$, а следовательно, и наше утверждение доказаны.

Ради простоты мы применим следствие из этого предложения к таким кривым, которые получаются путем закручивания из дуги окружности,

т. е. к пространственным кривым постоянной кривизны. Тогда путем подобного увеличения или уменьшения фигуры мы всегда можем достигнуть того, чтобы эта кривизна была равна единице. Поэтому мы ограничимся последним случаем. Рассмотрим все пространственные кривые с кривизной, равной единице, соединяющие две точки A и B. Для того чтобы среди этих кривых мы имели и дуги окружностей, допустим, что AB меньше двух. Тогда действительно между точками можно провести окружность радиуса единицы. Обе точки разбивают окружность на две дуги: более короткую дугу — I и более длинную — II (черт. 223). Оказывается, что имеет место следую-



Черт. 223.



Черт. 224.

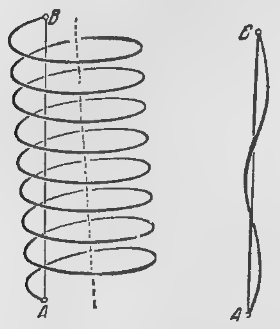
щий факт, с первого взгляда кажущийся парадоксальным: более короткая дуга I длиннее всех дуг соседних кривых нашего семейства, а более длинная дуга II, наоборот, короче всех соседних. При этом следует только исключить из рассмотрения те дуги, которые получаются из дуг I и II путем вращения вокруг AB, так как эти дуги конечно имеют такую же длину, как дуга I и соответственно I. Таким образом речь идет о тех дугах, которые получаются из дуг I и II путем закручивания.

Докажем теперь общее положение: если дуга пространственной кривой t постоянной кривизны, равной единице, соединяющая точки A и B, не длиннее дуги II, то она короче дуги I. Переведем при помощи закручивания дугу t в плоскую дугу окружности s, которую мы наложим на окружность, проведенную через AB таким образом, что один конец дуги s совпадет с точкой A (черт. 224). Тогда другой конец дуги s совпадет с некоторой точкой B' окружности. Согласно доказанной выше теореме хорда AB' короче хорды AB. Длина дуги t должна быть равна одной из тех дуг, на которые разбивает окружность хорда AB'. Из этих двух дуг одна длиннее, чем дуга II, и следовательно, исключается из рассмотрения; значит длина дуги t равна другой дуге окружности, т. е. короче дуги I.

Таким образом мы доказали, что не существует дуги с кривизной, равной единице, соединяющей точки A и B, промежуточной по длине между дугами I и II. Посмотрим теперь, не существует ли других ограничений для длины такой дуги.

Прежде всего легко видеть, что длина дуги может быть сколь угодно велика. В самом деле, между кривыми постоянной кривизны содержатся, между прочим, и винтовые линии (стр. 164). Ход винта таких винтовых

личий мы можем считать сколь угодно малым. Таким образом мы можем произвольно увеличить число витков такой винтовой линии между двумя точками, находящимися на расстоянии AB. Но при достаточно малом ходе каждый завиток имеет длину, приблизительно равную длине окружности радиуса единицы. Таким образом длина дуги между точками A и B может быть в самом деле сколь угодно большой (черт. 225).

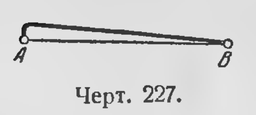


Черт. 225. Черт. 226.

Наоборот, такая дуга не может иметь бесконечно малой длины, а именно длина ее во всяком случае должна превосходить расстояние между точками A и B по прямой. К этой нижней границе, однако, можно подойти сколь угодно близко. Именно, если взять на винтовой линии с кривизной, равной единице, ход винта очень большим, то касательная к винтовой линии будет почти параллельной оси и расстояние винтовой линии от оси станет сколь угодно малым. Дуга такой винтовой линии сколь угодно мало отличается от ее хорды (черт. 226), и это доказывает наше утверждение.

Таким образом мы нашли, что задача соединения двух точек наикратчайшей кривой с кривизной, равной единице, не имеет решения. Выше мы характеризовали минимальные поверхности минимальным условием, похожим на это, и Риман сформулировал важные теоремы теории функций в виде определенных минимальных условий. Отсюда мы видим, что, казалось бы, само собой разумеющееся допущение, что всякая минимальная задача имеет решение, требует в каждом отдельном случае доказательства, и вовсе не всегда оно оправдывается. Такие доказательства существования являются до настоящего времени наиболее утомительными задачами анализа (§ 38, 39).

Вот совсем простой пример минимальной задачи, не имеющей решения. Пусть требуется соединить две точки A и B наикратчайшей дугой кривой так, чтобы эта дуга была перпендикулярна в точке A к прямой AB. В этом примере можно точно так же сколь угодно близко подойти к расстоянию по прямой между A и B, но никогда нельзя достигнуть его, так как прямолинейный отрезок AB не удовлетворяет нашему условию (черт. 227).



Черт. 227.

Наконец упомянем об одной минимальной задаче, существование решения которой уже давно подвергалось сомнению. Пусть требуется двигать в плоскости стержень AB таким образом, чтобы он в конечном счете повернулся на два прямых угла и при этом при своем движении образовал поверхность наименьшей площади. Только в самое последнее время Безикович показал (Math. Z. **27**, 1928), что эта задача не имеет решения. Зигзагообразным движением можно площадь этой поверхности сделать сколь угодно малой (§ 42).

32. Одиннадцать свойств шара. Мы ознакомились с поверхностями гауссовой кривизны, равной нулю. Теперь рассмотрим поверхности с постоянной положительной или отрицательной кривизной. Простейшей

и во многих отношениях важнейшей поверхностью такого рода является шар. Основательное исследование шара дает материал, достаточный для целой книги. Здесь мы приведем только одиннадцать особенно наглядных свойств шара. При этом мы познакомимся с несколькими новыми понятиями, имеющими значение не только для геометрии шара, но и для общей теории поверхностей. Относительно каждого из рассматриваемых свойств мы поставим вопрос, определяет ли это свойство шар однозначно или существуют и другие поверхности, обладающие таким же свойством.

1. Точки шара расположены на постоянном расстоянии от одной определенной точки и имеют постоянное отношение расстояний от двух неподвижных точек. Первое из этих свойств есть элементарное определение шара и потому определяет его однозначно. То, что шар обладает вторым свойством, можно непосредственно доказать аналитически. Однако следует заметить, что это второе свойство определяет кроме шара также и плоскость, а именно — плоскость получается тогда и только тогда, когда это отношение равно единице. В этом случае получается плоскость симметрии обеих точек.

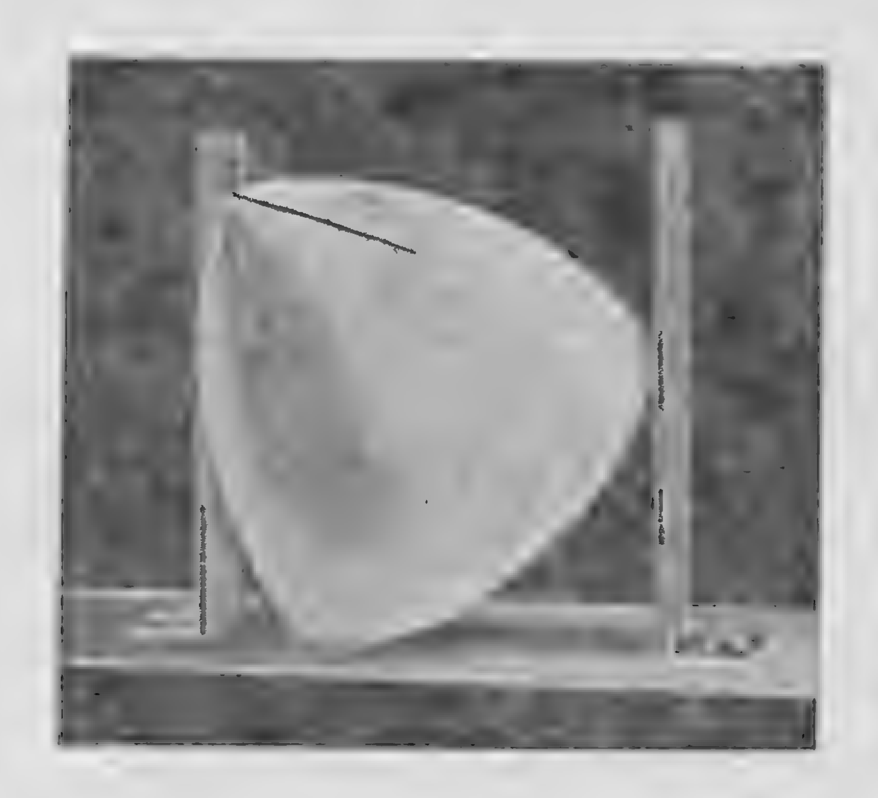
2. Очертания и плоские сечения шара суть окружности. При рассмотрении поверхностей второго порядка мы ознакомились с теоремой, что все плоские сечения и очертания этих поверхностей суть конические сечения. Для шара все эти конические сечения превращаются в круги. Этим обстоятельством шар определяется однозначно. Поэтому мы имеем право сделать вывод о шарообразности Земли из того факта, что при лунных затмениях тень Земли всегда имеет вид круга.

3. Шар имеет постоянную ширину и постоянный охват. Под постоянной шириной понимают то свойство шара, что две параллельные касательные плоскости шара всегда имеют одинаковое расстояние. Таким образом шар можно произвольным образом вращать между двумя такими плоскостями. Можно было бы думать, что это свойство определяет шар однозначно. В действительности же имеется много других выпуклых замкнутых и частично совершенно свободных от особенностей поверхностей, обладающих постоянной шириной, которые, следовательно, также можно вращать произвольно между двумя параллельными пластинками, причем эти пластинки будут все время касаться поверхностей. Одна из таких поверхностей изображена на черт. 228 в двух различных положениях.

Понятие постоянной ширины можно перенести также на кривые, а именно: плоской выпуклой замкнутой кривой приписывают это свойство в том случае, если две параллельные касательные к ней всегда имеют одинаковое расстояние. Окружность представляет одну из кривых подобного рода, но отнюдь не единственную. Из двух дуг кривой, на которые выпуклая замкнутая кривая постоянной ширины разбивается в точках касания двумя параллельными касательными, одну можно задать произвольно. Тогда другая может быть всегда определена однозначно так, чтобы получающаяся замкнутая кривая имела постоянную ширину. В этом легко убедиться непосредственно: касательные к заданной дуге

определяют однозначно касательные к другой дуге; следовательно, необходимо к каждой из заданных касательных на определенном расстоянии и с определенной стороны проводить параллели. Тогда вторая дуга получается просто как огибающая этого семейства прямых.

Тела постоянной ширины, очевидно, характеризуются тем, что при ортогональном проектировании все их контуры представляют кривые той же самой постоянной ширины. Можно показать, что все кривые одинаковой постоянной ширины имеют также одинаковую длину. Так как под охватом тела понимают длину какого-нибудь из контуров тела при ортогональном проектировании, то из этой теоремы следует, что тела постоянной ширины имеют также постоянный охват. Вследствие этого



Черт. 228а. Черт. 228б.

свойства всякую поверхность постоянной ширины можно произвольным образом вращать внутри охватывающего ее бумажного цилиндра, не растягивая и не разрывая цилиндр.

Минковский доказал, что и, обратно, все выпуклые поверхности постоянного охвата имеют также постоянную ширину, так что оба этих свойства поверхности взаимно обусловливают друг друга [1]).

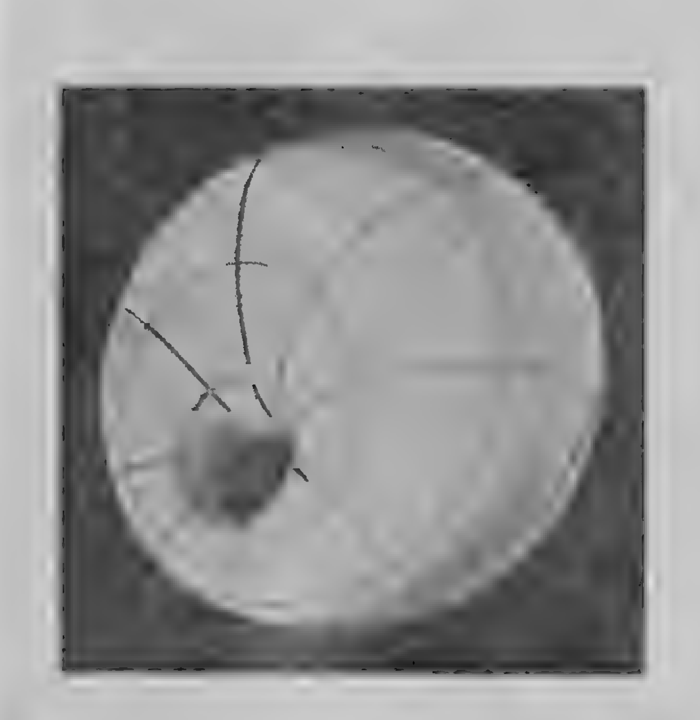
4. Ш а р с о с т о и т и з о д н и х т о л ь к о т о ч е к о к р у г л е н и я. Мы уже упомянули об этом свойстве раньше и одновременно указали на то, что помимо шара этим свойством обладает также плоскость (стр. 167). То, что все точки шара суть точки округления, следует, между прочим, и из того, что все плоские сечения шара суть круги. Если перемещать плоскость, пересекающую шар, параллельно самой себе до тех пор, пока сечение ее с шаром не обратится в некоторую точку P так, что плоскость станет касательной, то легко убедиться, что индикатриса Дюпена для точки P есть окружность (стр. 172), следовательно, точка P есть точка округления.

5. Ш а р н е и м е е т ф о к а л ь н ы х п о в е р х н о с т е й. Выше мы видели (стр. 166 и сл.), что центры кривизны всех нормальных сече-

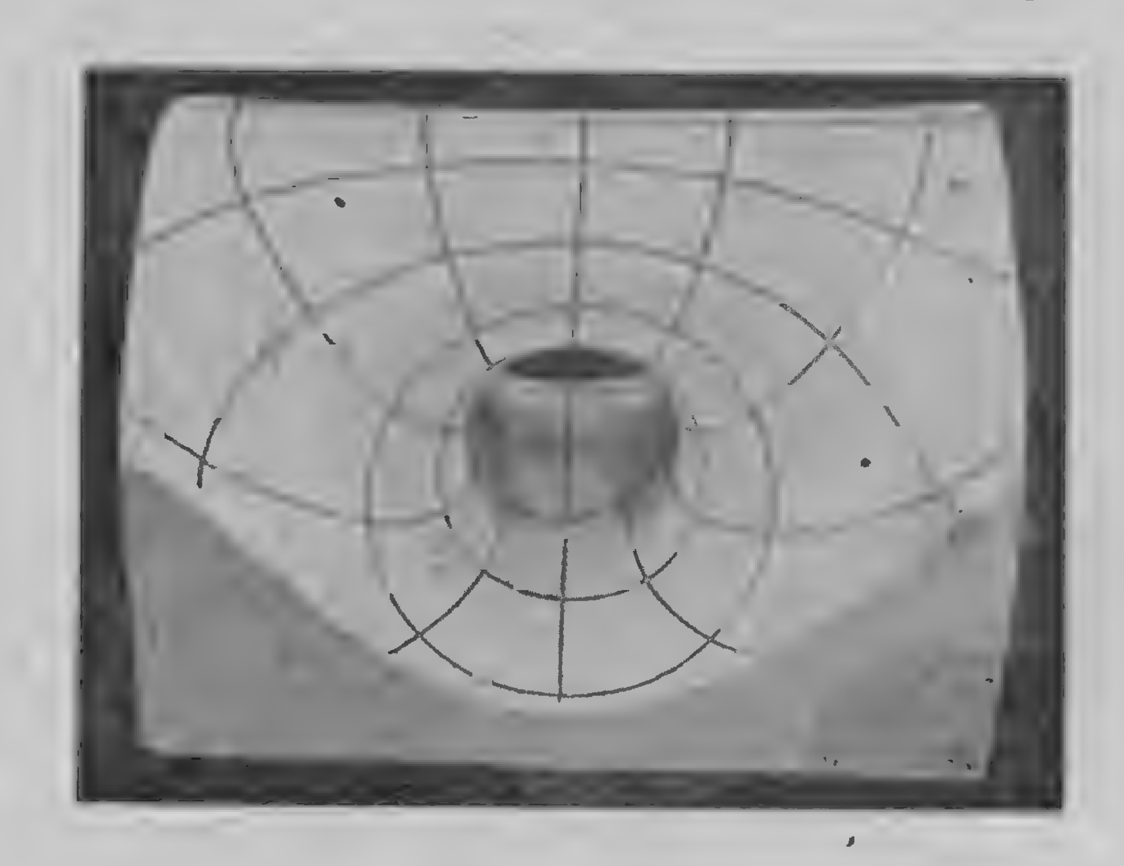
1) Если мы потребуем, чтобы все контуры тела сохраняли постоянную площадь вместо постоянного охвата то мы придем к другому классу поверхностей, к так называемым «поверхностям постоянного просвета». Шар является такой поверхностью, однако шар—отнюдь не единственная такая поверхность.

ний в какой-нибудь точке поверхности пробегают вообще некоторый отрезок нормали к поверхности в данной точке. Концами этого отрезка служат центры кривизны главных сечений. Обе эти точки называются фокальными точками нормали. Обе фокальные точки совпадают в том и только в том случае, если исходить из точки округления. Одна из точек удаляется в бесконечность тогда и только тогда, когда гауссова кривизна соответствующей точки поверхности равна нулю.

Когда нормаль пробегает все точки куска поверхности, то обе фокальные точки вообще описывают две поверхности, которые вместе называются фокальной поверхностью нашего куска поверхности. В случае шара фокальные поверхности состоят только из одной точки—центра



Черт. 229а.

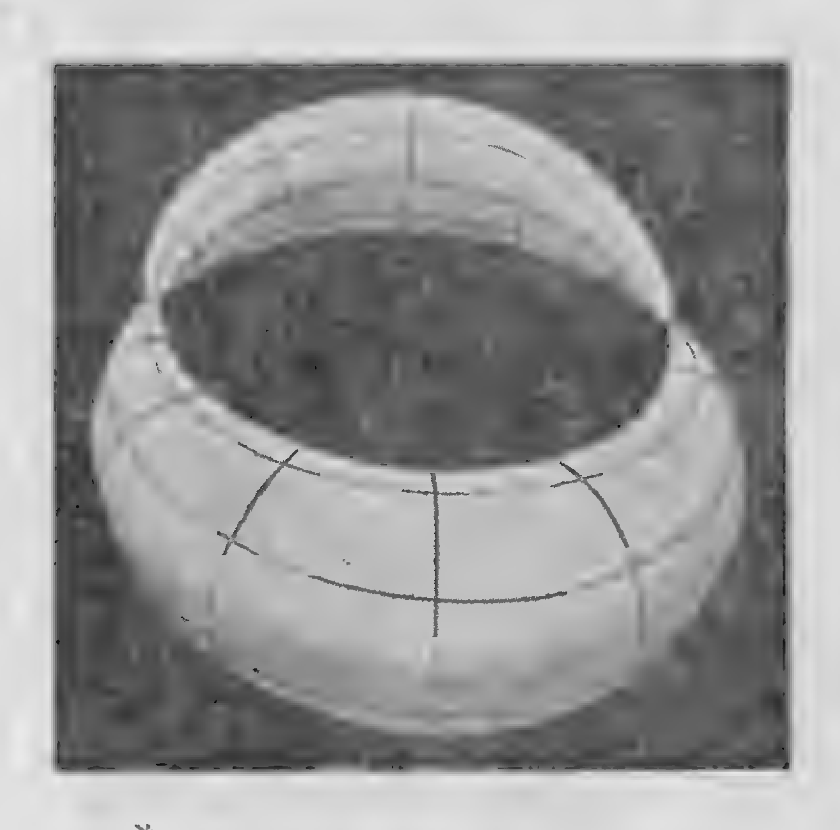


Черт. 229б.

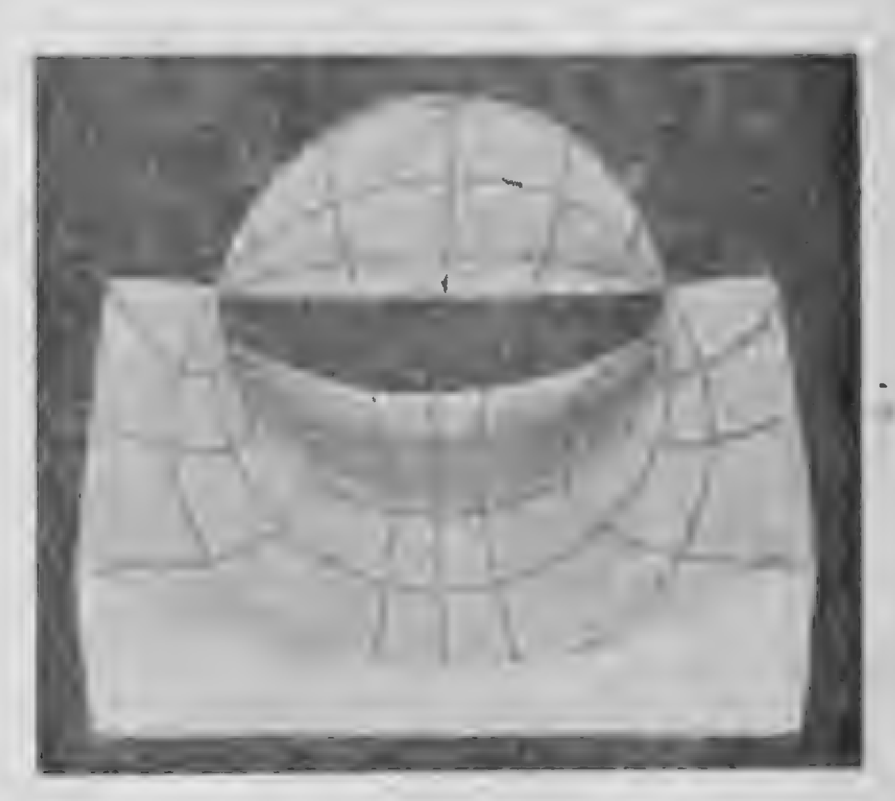
шара, так как все фокальные точки совпадают с центром шара. Шар представляет собой единственную поверхность, для которой часть фокальной поверхности вырождается в точку. Теперь постараемся найти те поверхности, для которых обе части фокальной поверхности вырождаются в кривые. Оказывается, что единственными поверхностями такого рода являются так называемые циклиды Дюпена, названные так по имени открывшего их ученого (черт. 229). Эти поверхности можно определить так же, как огибающие всех шаров, касающихся трех определенных шаров. Далее, циклиды суть единственные поверхности, все линии кривизны которых представляют окружности. На пяти гипсовых моделях, фотографии которых даны на черт. 229, нанесены некоторые линии кривизны. Впрочем, циклиды соприкасаются с каждым из огибаемых шаров по линии кривизны и все линии кривизны циклид получаются таким способом. Примером циклиды может служить уже известный нам тор. Его фокальная поверхность состоит из оси вращения и окружности, описываемой центром образующего круга при вращении. Далее, конус вращения и цилиндр вращения суть циклиды; одной частью фокальной поверхности является ось вращения, другая часть лежит в бесконечности. У других циклид фокальная поверхность состоит из двух конических сечений, в общем случае из эллипса и гиперболы, расположенных по

отношению друг к другу так, как расположены фокальные кривые поверхности второго порядка [1]).

Если мы теперь потребуем, чтобы только одна полость фокальной поверхности вырождалась в кривую, то соответствующий класс поверхностей будет гораздо шире. Все поверхности вращения обладают этим свойством; одна часть их фокальной поверхности всегда представляет ось вращения Наиболее общие поверхности этого рода суть *поверхности каналов.* Это — огибающие поверхности семейства шаров переменного радиуса, центры которых лежат на некоторой кривой. Кривая эта всегда является одной частью фокальной поверхности. Если вместо этой кривой взять прямую, то получим поверхности вращения, которые, сле-



Черт. 229в.



Черт. 229г.

довательно, представляют частный случай поверхностей каналов. Точно так же как в случае поверхностей вращения, и у других поверхностей каналов одно семейство линий кривизны состоит из окружностей; именно это суть предельные положения кругов, получающихся при пересечении соседних шаров.

У всех других кривых поверхностей фокальная поверхность состоит из двух полостей. Можно показать, что всякая нормаль в своих фокальных точках не пересекает этих полостей поверхности, а касается их. Таким образом, если известны обе полости фокальной поверхности для некоторой поверхности, то нормали можно определить как общие касательные этих двух частей.

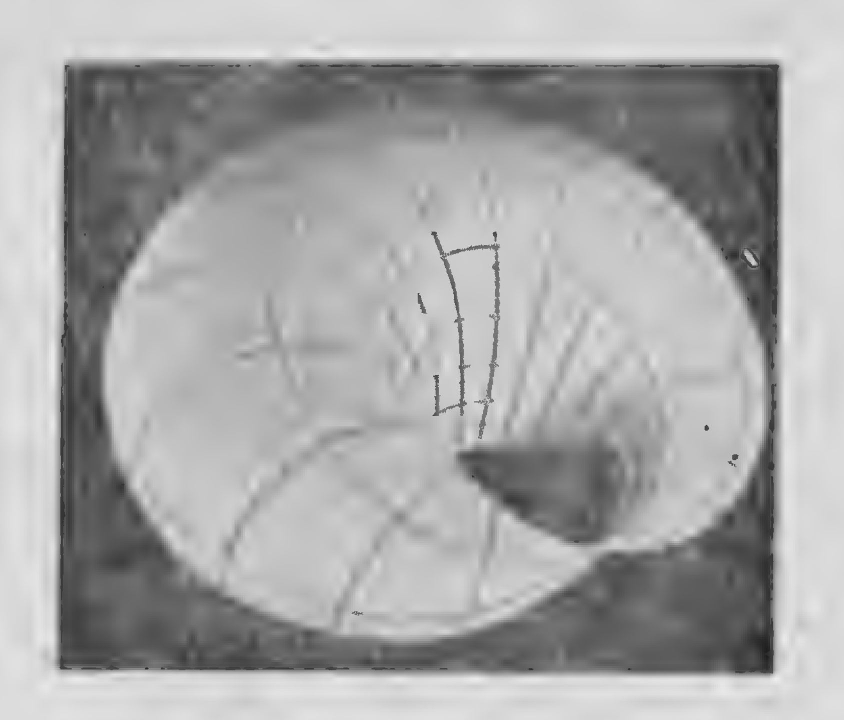
Возникает вопрос, как далеко можно пойти в смысле обращения этих отношений. Мы будем исходить из любых двух кусков поверхностей и рассмотрим семейство S всех прямых, касающихся обоих кусков по-

---

[1]) Изображенные на черт. 229а, б поверхности получаются из тора при помощи инверсии в пространстве. При этом центр инверсии лежит в случае поверхности 229б на торе, а в случае поверхности 229а — не на торе. Поверхности черт. 229в, г получаются при помощи пространственной инверсии из конуса вращения; черт. 229г соответствует случаю, когда центр инверсии лежит на поверхности. Черт. 229д представляет поверхность, получающуюся при помощи инверсии из кругового цилиндра; центр инверсии не лежит на поверхности цилиндра.

верхности. Спрашивается, существует ли поверхность, нормали которой состоят из семейства S, или, иначе говоря, не служат ли данные два куска поверхности фокальной поверхности для какой-нибудь поверхности. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно одно единственное условие: в обеих точках, в которых всякая прямая семейства S касается обеих поверхностей, касательные плоскости к обеим поверхностям должны быть перпендикулярны друг к другу. Пример пар поверхностей подобного рода представляет система софокусных поверхностей второго порядка. Именно, можно показать, что любые две неодноименные софокусные поверхности второго порядка всегда удовлетворяют нашему условию.

6. Все геодезические линии поверхности шара суть замкнутые кривые. Геодезические линии поверхности представляют обобщение прямых линий на плоскости. Так же как прямые, они обладают несколькими важными свойствами, которые выделяют их из всех других кривых на поверхности; поэтому их можно определить различными способами. Здесь мы приведем три определения: как *кратчайших* линий, как *фронтальных* линий и как *прямейших* линий.



Черт. 229д.

Первое свойство указывает, что всякая достаточно малая дуга геодезической линии представляет кратчайшую линию на поверхности среди всех линий, соединяющих концы этой дуги и могущих быть проведенными на поверхности. Отсюда следует, что при изгибании поверхности геодезические линии все время остаются геодезическими. Поэтому геодезические линии являются основными линиями для определения внутренних свойств поверхности (стр. 173), и при помощи вычерчивания геодезических линий и измерения их длины можно определить все внутренние свойства поверхности (например гауссову кривизну); это соответствует тому факту, что геометрию на плоскости можно целиком определить при помощи вычерчивания прямых и измерения отрезков. Точно так же как на плоскости через две точки проходит одна и только одна прямая, через две не слишком удаленные точки поверхности можно всегда провести одну и только одну дугу геодезической линии. Очевидно, эту дугу можно получить, если между обеими точками на поверхности натянуть нить [1]).

Второе свойство геодезических линий, состоящее в том, что они являются «фронтальными», также относится к внутренней геометрии поверхности. Именно, можно определить геодезические линии требованием, чтобы бесконечно малая дуга кривой AB на поверхности двигалась всегда «прямо». При этом требуется, чтобы пути точек A и B всегда имели равную длину и были всегда перпендикулярны к AB.

[1]) На внешней стороне выпуклого куска поверхности нить сама собой располагается по поверхности; в других случаях необходимо проследить за тем, чтобы нить ни в одной точке не покидала поверхности.

Путь, который при этом описывает середина отрезка AB, будет сколь угодно близок к геодезической линии, если выбрать дугу AB достаточно малой. Это определение делает понятным то, что через каждую точку в любом направлении проходит в точности одна геодезическая линия. Далее, в соответствии с этим определением можно приближенно построить геодезическую линию таким способом: пусть по поверхности катится возможно малая двухколесная коляска, колеса которой жестко связаны с осью и, следовательно, имеют одинаковую скорость вращения. Так как мы желаем, чтобы автомобиль мог ездить на земле не только по геодезическим линиям и так как в целях сохранения шин и по другим основаниям нам желательно предотвратить скольжение колес, то приходится позаботиться о том, чтобы оба задних колеса автомобиля имели возможность вращаться с различной скоростью.

Третье определение геодезических линий как «прямейших» связано уже не с внутренней геометрией поверхности, а с положением поверхности в пространстве. Именно, дуга геодезической линии во всех своих точках имеет наименьшую кривизну по сравнению со всеми теми кривыми на поверхности, которые имеют с дугой геодезической линии общую касательную в данной точке. Это свойство определяет геодезическую линию на всем ее протяжении, если задать одну из ее точек и ее направление в этой точке. Эту линию можно получить, если в заданной точке и в заданном направлении протянуть упругую прямую вязальную иглу и пригибать ее к поверхности так, чтобы она могла двигаться по поверхности только вдоль самой себя. Так как игла сопротивляется всякому искривлению, то она примет вид геодезической линии.

Можно также определить прямейшие линии и таким геометрическим требованием, чтобы соприкасающаяся плоскость кривой всегда проходила через нормаль к поверхности во всякой точке кривой. Наглядное рассмотрение показывает, что при этом две бесконечно близкие касательные кривой образуют друг с другом на поверхности наименьший возможный угол. Это обстоятельство уже приводит к условию наименьшей кривизны. Название геодезических линий обязано этому определению их при помощи соприкасающейся плоскости. Этим критерием пользуются в геодезии при проведении кратчайших линий на земной поверхности.

Геодезическими линиями шара служат большие круги. В самом деле, плоскости этих кругов пересекают шар перпендикулярно к поверхности и через каждую точку поверхности шара во всех направлениях проходит один большой круг. Соответственно этому все геодезические линии шара суть замкнутые кривые. Однако это свойство никоим образом не определяет шара; существуют еще многие другие выпуклые замкнутые поверхности, геодезические линии которых также замкнуты [1]).

Напрашивается мысль искать замкнутые геодезические линии также и у всех других поверхностей. Особенно просто ведут себя поверхности вращения. У них меридианы представляют всегда геодезические линии, так как плоскости меридианов проходят через ось и потому пересекают

---

[1]) Здесь и в дальнейшем под замкнутой геодезической линией мы подразумеваем такую линию, которая без изломов возвращается к исходной точке и не пересекает сама себя.

поверхность под прямым углом (выше мы уже доказали, что меридианы служат также линиями кривизны поверхности). Отсюда следует, что все замкнутые поверхности вращения обладают семейством замкнутых геодезических с одним параметром. На других поверхностях существуют только отдельные линии такого рода. Так, можно показать, что на трехосном эллипсоиде единственными замкнутыми геодезическими линиями без самопересечений являются те три эллипса, которые получаются в пересечении этой поверхности с тремя плоскостями симметрии.

Обратно, имеет место теорема, уже давно предполагавшаяся, но лишь недавно доказанная Люстерником и Шнирельманом, что на всякой выпуклой замкнутой поверхности проходят по крайней мере три замкнутых геодезических линии без самопересечений.

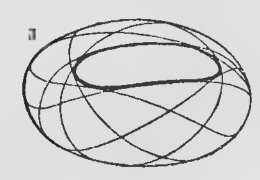
Геодезические линии имеют большое значение для физики. Материальная точка, свободная от действия сил, но вынужденная оставаться на определенной поверхности, всегда движется по геодезической линии поверхности. Каждое из приведенных нами определений геодезической линии дает основание для законов механики материальной точки; так, определение геодезической линии как кратчайшей соответствует принципу Якоби в механике; определение геодезической как прямейшей проявляется в принципе наименьшего принуждения Гаусса-Герца; положение соприкасающейся плоскости геодезической линии находит выражение в уравнениях Лагранжа первого рода.

Геодезические линии находятся в интересной связи с теорией фокальных поверхностей и линий кривизны. Выше мы уже упоминали, что нормали к поверхности касаются фокальной поверхности. Этим самым каждой точке фокальной поверхности соответствует некоторое направление на этой поверхности, именно направление той нормали к первоначальной поверхности, которая касается фокальной поверхности как раз в этой точке. Так же как в случае линий кривизны и асимптотических линий, можно интегрировать поле этих направлений на фокальной поверхности, т. е. можно получить семейство кривых, которые имеют в каждой точке соответствующее направление. Оказывается, что полученное таким образом семейство кривых состоит из геодезических линий. Касательные плоскости к этим геодезическим линиям, которые можно получить из нормалей к начальной поверхности, пересекают начальную поверхность по ее линиям кривизны, причем каждая полость фокальной поверхности дает одно из двух семейств линий кривизны.

Мы уже упоминали, что две софокусные поверхности второго порядка разного рода всегда можно рассматривать как фокальную поверхность некоторой поверхности. Это обстоятельство дает нам способ найти все геодезические линии трехосного эллипсоида. Возьмем гиперболоид H, софокусный с данным эллипсоидом E. Прямые, которые касаются как эллипсоида, так гиперболоида, определяют на эллипсоиде E поле направлений, интегральные кривые которого согласно указанной теореме суть геодезические. Однако таким способом мы никоим образом не получим всех геодезических линий эллипсоида E, так как через всякую точку поверхности проходят геодезические линии во всех направлениях, между тем как мы нашли геодезические линии только для вполне определенных направлений. Семейство найденных нами геодезических линий

эллипсоида E легко определить: можно показать, что мы получили все те и только те геодезические линии эллипсоида E, которые касаются кривой пересечения эллипсоида E и гиперболоида H (черт. 230). Они покрывают эллипсоид подобно тому, как касательные к эллипсу покрывают плоскость. Кривая пересечения эллипсоида E и гиперболоида H (которая кроме того является линией кривизны эллипсоида, как уже было упомянуто) делит эллипсоид на части. Одна часть остается непокрытой кривыми, между тем как через всякую точку другой части проходят две кривые семейства.

Теперь, чтобы получить все геодезические линии эллипсоида E, необходимо, чтобы гиперболоид H принимал вид всех однополостных и двуполостных гиперболоидов софокусной системы, определяемой эллипсоидом E. При этом фокальную гиперболу следует рассматривать как предельный случай гиперболоида. В качестве касательных этой вырожденной поверхности следует рассматривать все те прямые, которые пересекают фокальную гиперболу. Фокальная гипербола пересекает эллипсоид E в четырех точках округления. Переходя к пределу, мы получим, что семейство геодезических линий эллипсоида E, которое принадлежит к фокальной гиперболе, состоит из всех тех и только тех геодезических линий, которые проходят через точку округления эллипсоида[1]). Далее оказывается, что всякая геодезическая линия, проходящая через точку округления, проходит и через диаметрально противоположную точку округления.



Черт. 230.

В случае шара все геодезические линии, проведенные через какую-нибудь точку P, проходят также и через другую определенную точку, а именно диаметрально противоположную точке P. Геодезические линии, проходящие через точку округления эллипсоида, ведут себя аналогично. В то же время можно доказать, что геодезические линии, проходящие через какую-нибудь другую точку эллипсоида, не все имеют еще одну общую точку.

Теперь напрашивается вопрос: является ли шар единственной поверхностью, у которой все геодезические линии, проходящие через произвольную точку, снова пересекаются в другой определенной точке. Ответ на этот вопрос до сих пор еще не получен.

7. **Среди всех тел равного объема шар имеет наименьшую поверхность, а среди всех тел одинаковой поверхности он имеет наибольший объем.** Шар однозначно определяется обоими этими свойствами, из которых каждое есть следствие другого. Доказательство этого приводит к задаче вариационного исчисления и исключительно утомительно. Простейшее экспериментальное доказательство представляет всякий летящий мыльный пузырь. Как мы уже упоминали, когда говорили о минимальных поверхностях, мыльная пленка вследствие поверхностного натяжения стремится стянуться в поверхность, имеющую наименьшую площадь. Так как, с другой стороны, в мыльном пузыре содержится вполне определенный и неизменный

---

[1]) Описанное на стр. 168—169 построение при помощи нити тесно связано с этим.

объем воздуха, то пузырь должен при заданном объеме принять наименьшую поверхность. Наблюдение показывает нам, что подобные мыльные пузыри всегда имеют форму шара, если только они не подвержены значительному влиянию силы тяжести при наличии подвешенных к ним капель.

8. Среди всех выпуклых тел одинаковой поверхности шар имеет наименьшую полную среднюю кривизну. Средней кривизной H в точке поверхности называют арифметическое среднее из главных кривизн в этой точке:

$$H = \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2).$$

При этом обе главные кривизны следует брать с одинаковыми или противоположными знаками в зависимости от того, является ли поверхность во взятой точке выпуклой или седлообразной. В противоположность гауссовой кривизне средняя кривизна обычно не сохраняется при изгибании. Таким образом она характеризует в первую очередь положение поверхности в пространстве.

Пример, показывающий значение этого понятия кривизны, мы уже имели в минимальных поверхностях. Они определялись тем, что их главные кривизны во всякой точке равны и противоположны по знаку. Но отсюда вытекает, что средняя кривизна у них всюду равна нулю.

Чтобы теперь определить *полную* среднюю кривизну, представим себе, что рассматриваемая поверхность имеет определенную массу, распределенную так, что плотность в каждой точке равна средней кривизне. Полная масса, которую приобретает таким образом вся поверхность, называется полной средней кривизной этой поверхности.

Определение замкнутых поверхностей, полная средняя кривизна которых при заданной площади поверхности имеет минимум, приводит, так же как и предыдущее свойство шара, к вариационной задаче, причем здесь также выясняется, что шар представляет единственную поверхность, обладающую этим свойством.

Оба последних свойства шара можно получить в общей теории выпуклых тел из определенных неравенств, сущность которых здесь постараемся наметить. Шар радиуса r имеет поверхность $O = 4\pi r^2$ и объем $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Для того чтобы получить одинаковую размерность, мы должны сравнить куб поверхности с квадратом объема. Это дает нам соотношение:

$$O^3 = 36\pi V^2,$$

не зависящее от радиуса и имеющее место для всякого шара. Так как шар имеет наибольший объем из всех поверхностей с той же самой площадью, то при сравнении шара со всеми остальными поверхностями мы должны иметь:

$$O^3 \geqslant 36\pi V^2.$$

Если обозначить через M полную среднюю кривизну поверхности, то для всех выпуклых тел можно доказать следующие два важных соотношения:

$$O^2 - 3VM \geqslant 0,$$
$$M^2 - 4\pi O \geqslant 0.$$

Во второй формуле знак равенства имеет место только для шара; но это как раз и свидетельствует о том, что среди всех выпуклых тел с данной поверхностью шар и только шар дает наименьшее значение M. Если исключить M из обеих формул, то получается только что выведенное соотношение между поверхностью и объемом, причем ясно, что знак равенства имеет место только для шара. При этом для сравнения допускаются только выпуклые тела, между тем как в действительности неравенство между объемом и поверхностью осуществляется также и для тел, не всюду выпуклых.

9. Поверхность шара имеет постоянную среднюю кривизну. То, что поверхность шара имеет постоянную среднюю кривизну, следует из того, что все ее нормальные сечения имеют одинаковый радиус кривизны, а именно радиус шара. Однако поверхность шара отнюдь не единственная поверхность такого рода. В самом деле, у всех минимальных поверхностей средняя кривизна равна нулю и значит также постоянна. Так же как поверхность шара и как минимальные поверхности, все остальные поверхности с постоянной средней кривизной можно осуществить при помощи мыльных пузырей. Проведем через произвольную замкнутую пространственную кривую определенную поверхность и кроме того натянем мыльную пленку на этой пространственной кривой. Для того чтобы получить это, мы можем, например, придать отверстию трубки форму заданной пространственной кривой, затем выдуть при помощи этой трубки мыльный пузырь и заткнуть герметически отверстие трубки. Тогда внутри пространства, ограниченного мыльной пленкой и внутренностью трубки, будет заключено определенное количество воздуха, и мыльная пленка под влиянием поверхностного натяжения примет такую форму, при которой поверхность при заданных условиях будет минимальной. Вариационное исчисление показывает, что всякая подобная поверхность должна обладать постоянной средней кривизной. Постоянное значение средней кривизны зависит от того, какой объем воздуха мы заключим внутри нашего пузыря, увеличив или уменьшив давление путем вдувания воздуха. Если внутреннее давление вообще не превышает внешнего давления воздуха, то в таком случае мы снова приходим к минимальным поверхностям.

Следовательно, в наших мыльных пленках мы имеем большое количество искомых поверхностей. Однако все эти поверхности обладают тем свойством, что они обрываются непосредственно пространственной кривой, т. е. пространственная кривая служит для них границей. Поэтому возникает вопрос, не существуют ли кроме поверхности шара еще другие поверхности постоянной средней кривизны, которые, однако, не имеют границы, а также и других особенностей. И вот оказывается, что на этот вопрос следует ответить отрицательно, так что поверхность шара однозначно определяется нашими дополнительными требованиями. Это обстоятельство легко уяснить себе на мыльных пузырях. Мы уже знаем, что свободно летящий в воздухе мыльный пузырь всегда имеет форму шара. Если теперь мы будем выдувать мыльные пузыри одинаковой величины, но со все меньшей граничной кривой, то следует ожидать (и это подтверждается опытом), что вид граничной кривой будет оказывать все меньше влияния на форму мыльного пузыря, так что в пре-

деле этот пузырь всегда будет принимать форму не имеющего границы мыльного пузыря, т. е. шара [1]).

10. Поверхность шара обладает постоянной положительной гауссовой кривизной. В отношении этой характеристики шара имеет место то же самое, что и в случае средней кривизны. Одно только постоянство гауссовой кривизны наверно не определяет поверхности шара. В самом деле, все поверхности, которые можно получить из куска шаровой поверхности путем изгибания, также обладают постоянной гауссовой кривизной, так как последняя не меняется при изгибании. Потребуем теперь опять в качестве дополнительного условия, чтобы поверхность не имела границ и других особенностей, и спросим, имеются ли кроме поверхности шара другие поверхности подобного рода. Оказывается, что на этот вопрос следует ответить отрицательно; отсюда, между прочим, следует, что шар как целое не допускает изгибания. Прежде всего можно доказать, что не имеющая особенностей неограниченная поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны не может иметь бесконечное протяжение как плоскость, но необходимо должна быть замкнутой поверхностью подобно поверхности шара. Простые вычисления показывают далее, что кроме шаров, круговых цилиндров и плоскостей нет других поверхностей, для которых обе главные кривизны имеют всюду постоянное значение. Поэтому мы можем ограничиться тем случаем, когда на замкнутой поверхности обе главные кривизны меняют значение, причем конечно произведение их всегда имеет заданное постоянное значение гауссовой кривизны. На такой поверхности должна быть по крайней мере одна правильная точка, в которой одна из главных кривизн имеет максимальное значение. Оказывается, можно аналитически доказать, что на куске поверхности с постоянной положительной кривизной не может быть такой точки. Другими словами, на ограниченном нешарообразном куске поверхности с постоянной положительной кривизной максимальные значения главных кривизн всегда относятся к точкам границы. Так как поверхность шара не имеет границы, то отсюда следует, что поверхность шара как целое не может быть изгибаема и что вообще кроме шаровых поверхностей не суще-

[1]) Если выдувать мыльную пленку, натянутую на раструбе трубки, то средняя кривизна мыльного пузыря должна, казалось бы, непрерывно возрастать Однако это—заблуждение. Сначала, в самом деле, средняя кривизна возрастает от нулевого значения ее для минимальной поверхности. Но если продолжать сильно выдувать дальше (отвлекаясь при этом от возможности, что пузырь лопнет), то мыльный пузырь, как это следует из проведенного в тексте рассмотрения, принимает приблизительно вид шара, непрерывно увеличивающегося; поэтому средняя кривизна, равная обратному значению радиуса шара, безгранично уменьшается, стремясь к нулю. В соответствии с этим для достаточно малых значений c средней кривизны и для определенной граничной кривой существуют по крайней мере две ограниченные кривой поверхности постоянной средней кривизны c. Это явление находится в замечательном противоречии со многими другими вариационными задачами, при которых всегда существует только одна единственная экстремальная поверхность, ограниченная заданной замкнутой кривой. Впрочем, если пренебречь знаком средней кривизны, то при помощи той же самой граничной кривой можно получить еще две другие поверхности той же самой постоянной средней кривизны; эти поверхности можно осуществить при помощи мыльных пузырей, если выдувать первоначально взятую минимальную поверхность с другой стороны.

ствует неограниченных и не имеющих особенностей поверхностей с постоянной положительной гауссовой кривизной.

Так как, с другой стороны, очевидно, существуют изгибаемые куски шаровой поверхности, то возникает вопрос, какую дыру нужно вырезать в поверхности шара, для того чтобы остальная его часть стала изгибаемой. Естественно было бы предположить, что такая дыра должна иметь какую-то минимальную величину, например величину полушария. Можно, однако, доказать, что имеет место противоположное: поверхность шара становится изгибаемой, если вырезать в ней дыру произвольно малой величины: достаточно даже надрезать шар вдоль произвольно малой дуги большего круга. Напротив, если шар продырявить в одной или нескольких изолированных точках, то поверхность останется неизгибаемой.

То обстоятельство, что поверхность шара становится изгибаемой уже в том случае, если вырезать в ней произвольно малую дыру, можно поставить в своеобразную связь с поведением мыльных пузырей. Именно, аналитически легко доказать следующее: если исходить из куска поверхности F с постоянной средней кривизной c и если на всех нормалях к поверхности F нанести отрезки длиной $\frac{1}{2}c$ в одну определенную сторону, то новая поверхность g, которую образуют концы этих отрезков, не имеет постоянной средней кривизны, но заведомо имеет постоянную гауссову кривизну $4c^2$. Поверхность g называется параллельной поверхностью к поверхности F на расстоянии $\frac{1}{2}c$. Если F представляет кусок шаровой поверхности, то g представляет кусок шаровой поверхности, концентрической с F; обратно, g только тогда может быть куском шаровой поверхности, когда F представляет кусок шаровой поверхности. Именно, можно доказать, что нормали к поверхности F пересекают поверхность g в соответствующих точках также нормально. Сторона поверхности F, на которую нам приходится наносить отрезки на нормалях, не произвольна; можно легко уточнить наши указания, если представить себе поверхность F как поверхность мыльного пузыря на замкнутом отверстии трубки; в этом случае необходимо проводить отрезки на нормалях, направленных внутрь заключенного в трубке воздуха.

Теперь вообразим, что на шаре радиуса $\frac{1}{c}$, т. е. со средней кривизной c, начерчена малая замкнутая кривая R и что эта кривая непрерывно деформируется так, что деформированные кривые уже не лежат на шаре. Легко понять, что при не очень сильной деформации можно на все эти кривые натягивать мыльную пленку с постоянной средней кривизной c. Именно, если мы натянем на первоначальную кривую мыльную пленку, то, если выдуть эту пленку достаточных размеров, заведомо можно превратить ее в поверхность со средней кривизной c. В самом деле, шар, на котором расположена кривая R, представляет собой подобную поверхность, и если мы будем выдувать с соответствующей стороны, то на определенной стадии мы получим больший кусок шаровой поверхности, ограниченной кривой R. Из соображений непрерывности следует, что при соответствующем вдувании воздуха при дефор-

мации кривой R можно достичь того, что мыльная пленка, имевшая первоначально форму шаровой поверхности, при деформации кривой R непрерывно изменяется и при этом сохраняет значение средней кривизны; напротив, деформируемые мыльные пленки не могут сохранять форму шара, так как деформированные граничные кривые согласно нашему построению не лежат на шаре. Теперь будем строить ко всем этим мыльным пленкам внутренние параллельные поверхности на расстоянии $\frac{1}{2}c$. При этом мы будем пробегать непрерывное семейство поверхностей, которые согласно приведенной теореме будут все время иметь постоянную гауссову кривизну $4c^2$. Первая из этих поверхностей есть шар радиуса $\frac{1}{2}c$, в котором вырезана маленькая дыра, ограниченная кривой, подобной и подобно расположенной с кривой R. Все остальные поверхности могут быть непрерывно изгибаемы на первую; однако они не могут иметь форму шара, так как, как уже было упомянуто, в противном случае и мыльные пленки должны были бы иметь форму шара. Таким образом шар, имеющий произвольно малую дыру, в самом деле изгибаем.

Изгибаемость ограниченных и неограниченных поверхностей была предметом исследования и в случае поверхностей значительно более общего вида. Неизгибаемы все выпуклые замкнутые поверхности, например эллипсоиды. Точно так же неизгибаемы все выпуклые поверхности с границами, если поверхность имеет одну и ту же касательную плоскость вдоль каждой граничной кривой. Примером подобной поверхности (с двумя границами) является выпуклая часть поверхности тора (черт. 210, стр. 179).

Если вырезать на замкнутой выпуклой поверхности произвольно малую дыру, то поверхность становится изгибаемой. Остается невыясненным, достаточно ли только надрезать поверхность.

11. Шар переводится в самого себя семейством движений с тремя параметрами. Совокупность всех движений, приводящих шар к совпадению с самим с собой, очевидно, представляют вращения вокруг центра шара. Эта совокупность действительно зависит от трех параметров. В самом деле, два параметра необходимы для определения положения оси вращения (проходящей через центр, в остальном же произвольной), а третий параметр необходим для определения угла поворота. Подсчет параметров можно провести также и с другой точки зрения. Очевидно, любая точка шара может быть переведена в любую другую точку шара при помощи одного из движений семейства и кроме того определенное направление, проходящее через взятую точку на шаре, может быть переведено в произвольное направление, проходящее через вторую точку. Этим однозначно определяется одно отображение из нашего семейства. Но это определение требует как раз трех параметров, так как произвольно выбранный образ точки зависит от двух параметров, а проходящие через него на шаре направления образуют еще одно семейство с одним параметром. Последний подсчет может быть проведен не только для шара, но и для плоскости; таким образом плоскость также обладает семейством движений с тремя параметрами.

Других поверхностей такого рода не существует, так что это свойство определяет шары и плоскости.

Теперь будем искать все другие поверхности, которые вообще обладают семейством движений; это семейство необходимо должно быть семейством с одним или двумя параметрами. Единственными поверхностями, обладающими семейством движений с двумя параметрами, являются круговые цилиндры. Произвольное вращение вокруг оси и произвольное переносное движение вдоль оси переводят круговой цилиндр в самого себя. Это есть семейство движений с двумя параметрами; других же движений, переводящих круговой цилиндр в самого себя, не существует. При помощи одного из таких движений можно любую точку кругового цилиндра перевести в любую другую. Напротив, направления нельзя отображать произвольно, так как образующие цилиндра при этих движениях всегда переходят опять в образующие.

Для поверхностей с семейством движений с одним параметром хорошим примером служат поверхности вращения. Эти поверхности при всех вращениях вокруг оси и (если исключить шары, плоскости и круговые цилиндры) только при этих движениях переходят в самих себя. Таким образом каждая точка может быть переведена в произвольную точку параллели, и этим вполне определяется отображение.

Однако поверхности вращения отнюдь не исчерпывают совокупности всех поверхностей, обладающих семейством движений с одним параметром. Класс поверхностей, характеризующихся этим свойством, состоит из винтовых поверхностей; этот класс поверхностей охватывает поверхности вращения, с одной стороны, и цилиндры — с другой, как предельные случаи. Как уже было указано на стр. 187, всякую винтовую поверхность можно получить следующим образом: возьмем произвольную пространственную кривую и будем вращать ее с произвольной постоянной угловой скоростью вокруг произвольной прямой и кроме того придадим ей переносное движение с постоянной скоростью вдоль этой прямой. Из определения следует, что винтовые поверхности обладают семейством движений с одним параметром, а именно тем семейством движений, которое позволяет получить эти поверхности из пространственной кривой. Упомянутые уже предельные случаи получаются в том случае, когда или угловая скорость или скорость переносного движения равны нулю. В первом случае винтовое движение превращается в переносное и пространственная кривая описывает цилиндр, во втором случае получается вращение и пространственная кривая образует поверхность вращения [1]).

Всякая точка образующей кривой описывает (если исключить предельные случаи) винтовую линию. Таким образом семейство движений винтовой поверхности с одним параметром переводит всякую точку в произвольную точку соответствующей винтовой линии; в предельных случаях

---

[1]) То, что кроме винтовых поверхностей не существует других поверхностей с однопараметрическим семейством движений, следует из того, что движения поверхности по самой себе образуют группу. Однако винтовые движения вокруг постоянной оси с постоянным шагом, если причислить к этим движениям также и вращение вокруг оси и переносные движения вдоль оси в качестве предельных случаев, образуют наиболее общие однопараметрические группы движений пространства.

винтовая линия переходит в образующие цилиндра или в параллели поверхности вращения.

33. Изгибание поверхностей на себя. Обобщим теперь вопрос, возникший в связи с одиннадцатым свойством шара. Рассмотрим поверхности, которые вместо движений допускают произвольные изгибания на себя. Вполне гибкий, но нерастяжимый кусок оловянной жести, который может быть наложен в каком-нибудь месте на модель подобной поверхности, должен соответствующим образом перемещаться по модели; при этом он должен изменять свою форму, но не испытывать разрывов и все время плотно соприкасаться с поверхностью.

В то время как подвижность поверхности по самой себе зависит от положения поверхности в пространстве, изгибаемость поверхности в себе представляет внутреннее свойство поверхности, которое не может исчезнуть или появиться при изгибании поверхности.

Так как движения представляют частный случай изгибаний, то среди тех поверхностей, которые мы сейчас ищем, во всяком случае должны встретиться поверхности, перечисленные нами в предыдущем параграфе. Оказывается, что все эти поверхности и их изгибания уже дают самый общий случай поверхностей, обладающих семейством изгибаний на себя; таким образом при обобщении постановки вопроса мы не получаем существенно нового класса поверхностей. Но установленные выше типы поверхностей получают теперь иное значение. Так, очевидно, цилиндры следует рассматривать как не имеющие существенного отличия от плоскостей, так как плоскость может быть изгибаема в любой цилиндр. Точно так же второй предельный случай винтовых поверхностей, случай поверхности вращения, теряет свой особый характер. Именно, всегда можно кусок произвольной винтовой поверхности путем изгибания превратить в кусок поверхности вращения. Для этого достаточно придать какой-нибудь из винтовых линий, проходящих на поверхности, путем изгибания форму круга, который конечно должен обходить поверхность бесчисленное количество раз, так как винтовая линия имеет бесконечную длину. При этом все остальные винтовые линии сами собой принимают также вид окружностей и все эти окружности имеют одну и ту же ось, так что получающаяся поверхность в самом деле есть поверхность вращения, параллели которой возникают из винтовых линий начальных поверхностей. Пример, подтверждающий это положение, представляет описанное на стр. 187 наложение геликоида на катеноид.

Если отказаться от рассмотрения вопроса с аналитической точки зрения, то легко сделать наглядным то, что поверхности, обладающие семейством изгибаний с одним параметром, всегда могут быть превращены в винтовые или в поверхности вращения, и то, что при этом винтовые линии и параллели соответствуют друг другу.

Через всякую точку куска подобной поверхности должна проходить кривая, представляющая совокупность всех точек, изображающих данную точку, когда мы осуществляем изгибания нашего семейства. Следовательно, кусок поверхности покрывается целиком и непрерывно определенным семейством кривых, которые при рассматриваемых изгибаниях переходят сами в себя. Если выбрать две произвольные кривые из этого пучка, то все точки одной кривой должны находиться на одинаковом расстоянии

по геодезическим от другой кривой, так как это расстояние при изгибании не изменяется. Отсюда следует, что всякая геодезическая линия, перпендикулярная к какой-нибудь кривой семейства, перпендикулярна и к остальным кривым; в самом деле, кратчайшее расстояние точки поверхности от кривой, проведенной на поверхности, определяется на поверхности геодезической линией, проходящей через данную точку и перпендикулярной к кривой. Таким образом на рассматриваемых поверхностях всегда имеется ортогональная сеть кривых, из которых одно семейство есть только что описанное семейство, а другое состоит из геодезических линий. Вследствие этого вдоль каждой кривой первого семейства гауссова кривизна должна быть постоянной, так как она остается неизменной при изгибании, и всякая точка кривой семейства при рассматриваемых изгибаниях должна переходить в любую другую точку той же кривой. Следовательно, чтобы описать распределение значений гауссовой кривизны на нашей поверхности, достаточно задать эту кривизну вдоль геодезической линии второго семейства как функцию длины дуги.

Легко теперь построить поверхности вращения, для которых гауссова кривизна представляет наперед заданную функцию длины дуги меридиана. Так как меридианы поверхности вращения суть геодезические линии, пересекающие параллели ортогонально, то понятно (что легко проверить вычислением), что заданный кусок поверхности можно изгибанием превратить во все эти поверхности вращения; построенная нами ортогональная сеть на поверхности при этом превратится в сеть меридианов и параллелей.

На винтовых поверхностях, очевидно, винтовые линии обладают таким же свойством, как параллели поверхностей вращения. Они опять-таки представляют траектории отображений поверхности на себя с сохранением длин. Таким образом вообще, если винтовая поверхность может быть изгибанием превращена в поверхность вращения, то винтовые линии и параллели необходимо соответствуют друг другу.

Вычисление показывает, что из всякой винтовой поверхности можно путем изгибания получить другое семейство винтовых поверхностей с двумя параметрами и семейство поверхностей вращения с одним параметром.

Рассмотрим теперь поверхности, обладающие семейством изгибаний с двумя или многими параметрами. То, что семейство изгибаний обладает по крайней мере двумя параметрами, равнозначно с тем, что всякая точка поверхности может быть переведена во всякую соседнюю точку. Поэтому гауссова кривизна этих поверхностей должна быть постоянной. Все поверхности с постоянной положительной гауссовой кривизной (если ограничиться достаточно малыми кусками) могут быть развернуты на шар (стр. 201). Как этот последний, они обладают, следовательно, семейством изгибаний на себя не только с двумя параметрами, но даже с тремя параметрами. То же самое имеет место для поверхностей с гауссовой кривизной, равной нулю, так как эти поверхности могут быть развернуты на плоскость. Можно аналитически доказать, что и поверхности с постоянной отрицательной кривизной обладают одинаковым многообразием изгибаний.

Таким образом все поверхности с постоянной гауссовой кривизной имеют одно общее с плоскостью важное внутреннее свойство, которое мы в дальнейшем исследуем более подробно. Можно так построить гео-

метрию на плоскости, что ее основные и наиболее общие положения будут иметь место не только на плоскости, но и на всех поверхностях с постоянной кривизной и что только в более тонких деталях этого построения получится различие между плоскостями и поверхностями с постоянной положительной или отрицательной гауссовой кривизной; тогда геометрия разделится на эвклидову и на две «неэвклидовы» геометрии.

34. Эллиптическая геометрия. На кривых поверхностях следует рассматривать геодезические линии как аналоги прямых на плоскости. Исследуем теперь эту аналогию более подробно. Простейшее построение плоской геометрии основывается на вычерчивании прямых и нанесении отрезков и углов. Если перенести эти построения на кривые поверхности, то прежде всего возникает следующее принципиальное различие: на плоскости мы всегда клали в основу прямые на всем их протяжении, между тем как на кривых поверхностях мы всегда рассматривали только малые куски в соответствии с диференциально-геометрической точкой зрения. Поэтому мы должны ограничиться такими построениями, которые не выходят из пределов куска поверхности и которые, следовательно, соответствуют рассмотрению малой области на плоскости.

На всяком достаточно малом куске кривой поверхности можно провести через две не слишком близких к границе точки одну и только одну дугу геодезической линии, так же как на всякой области плоскости через две не слишком близкие к границе точки можно провести одну и только одну соединяющую их прямую, расположенную в данной области [1]).

На всяком куске поверхности можно построить угол с геодезическими сторонами таким же образом и так же его переносить, как угол с прямолинейными сторонами на куске плоскости.

Точно так же перенос геодезических отрезков подчиняется тем же законам, что и перенос прямолинейных отрезков на куске плоскости.

Но уже при простейших построениях, состоящих из этих трех элементов, а именно при построении конгруэнтных треугольников, аналогия, вообще говоря, нарушается. Два треугольника называются конгруэнтными, если при соответствующем наложении вершин соответствующие стороны и углы равны. Очевидно, это понятие может быть перенесено на геодезические треугольники на кусках кривых поверхностей. Если теперь мы на куске плоскости будем исходить от треугольника $A_0B_0C_0$ и подберем для точки A точки B и C так, чтобы было $AB = A_0B_0$, $AC = A_0C_0$ и $\measuredangle BAC = \measuredangle B_0A_0C_0$, то, согласно первой теореме о конгруэнтности, треугольник ABC конгруэнтен с треугольником $A_0B_0C_0$; при этом следует только предположить, что точка A расположена так далеко от границы области, что все эти построения возможны в пределах области.

Если, однако, предпринять аналогичные построения на куске кривой поверхности, то геодезическая дуга BC, вообще говоря, имеет длину, отличную от B_0C_0. Таким образом не может быть речи о конгруэнтности двух треугольников ABC и $A_0B_0C_0$.

В одном случае, однако, можно перенести первую теорему конгруэнт-

---

[1]) В случае если граница не всюду выпукла, прямая, соединяющая две достаточно близкие к границе точки, может частично лежать вне области.

ности на геодезические построения,—именно в том случае, когда кусок поверхности обладает постоянной гауссовой кривизной. Тогда мы можем так изгибать наш кусок поверхности, что точка A совпадет с точкой A_0 и геодезические стороны угла $B_0A_0C_0$ совпадут с соответствующими сторонами угла BAC[1]). Вследствие сохранения длин и углов при изгибании точка B_0 совпадет с точкой B и точка C_0—с точкой C; таким образом в этом случае треугольники $A_0B_0C_0$ и ABC должны быть конгруэнтными.

Аксиоматический анализ плоских геометрических построений показывает, что все теоремы относительно конгруэнтности фигур можно свести логически к первой теореме конгруэнтности. Следовательно, на поверхностях с постоянной кривизной для указанных нами построений осуществляется полностью аналогия с геометрией на куске плоскости.

Первую теорему конгруэнтности мы перенесли на поверхности с постоянной кривизной так, что мы связали с ними группу изгибаний с тремя параметрами. Можно, однако, эту связь логически обратить. Если на какой-нибудь поверхности имеет место теорема конгруэнтности для геодезических треугольников, то отсюда следует, что поверхность должна обладать семейством отображений, сохраняющих длину, с тремя параметрами и потому должна обладать постоянной гауссовой кривизной. Прежде всего из описанного выше построения треугольников вытекает, что для достаточно малого геодезического треугольника всегда можно подобрать ∞^3 конгруэнтных треугольников. Но если положить в основу некоторый треугольник, то при помощи нанесения отрезков и углов и повторного применения первой теоремы конгруэтности можно целиком измерить поверхность по таким же принципам, которые применяются в практике измерений на земной поверхности. Всякому конгруэнтному нанесению основного треугольника соответствует поэтому некоторое отображение куска поверхности с сохранением длин.

Таким образом мы показали, что поверхности с постоянной гауссовой кривизной суть единственные, на которых имеет место первая теорема конгруэнтности для геодезических треугольников.

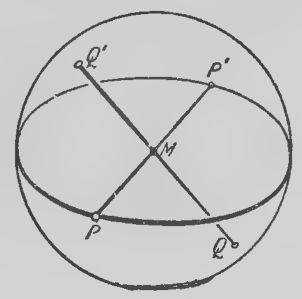
Чтобы проследить дальше аналогию этих поверхностей с плоскостью, мы должны теперь попытаться устранить ограничение только малыми областями. Начнем с поверхностей, постоянная гауссова кривизна которых положительна. Напрашивается мысль начать с шаровой поверхности. Однако тем, что мы рассматриваем эту поверхность в целом, аналогия с плоскостью нарушается в существенном пункте. Геодезические линии шара суть большие круги; через две диаметрально противоположных точки шара, однако, проходит бесконечное множество больших кругов, между тем как на плоскости через две точки всегда можно провести только единственную прямую, соединяющую их. Далее, в то время как на плоскости две прямые имеют не более одной точки пересечения, два больших круга на шаре всегда пересекаются в двух диаметрально про-

---

[1]) Это не всегда возможно сделать при помощи непрерывного преобразования невозможно это сделать даже на плоскости, где, как известно, и зеркальные преобразования следует отнести к совмещениям. На поверхностях с постоянной не равной нулю кривизной также существуют отображения, сохраняющие длину и соответствующие зеркальным отображениям.

тивоположных точках. Никакую другую поверхность с постоянной положительной кривизной, кроме шаровой, мы уже потому не можем рассматривать как аналог плоскости, что все такие поверхности имеют особые точки или границы.

Простой абстракцией, однако, можно устранить мешающее нам свойство шаровой поверхности. Именно, выделим поверхность полушария и будем рассматривать каждую пару диаметрально противоположных точек большого круга, ограничивающего это полушарие, как одну единственную точку. Далее, если какая-нибудь сферическая фигура выйдет за пределы граничного круга, то будем заменять точки, попадающие вне рассматриваемого полушария, диаметрально противоположными точками, которые будут находиться на рассматриваемом полушарии (черт. 231).



Черт. 231.

Таким образом мы получим точечный образ, обладающий всеми теми свойствами, из которых мы исходили. Во-первых, всякий достаточно малый кусок отображается с сохранением длин на кусок шаровой поверхности. Во-вторых, граница не препятствует нанесению отрезков и соединению двух точек геодезическими линиями. В-третьих, две различные точки всегда можно соединить единственной геодезической линией, а две геодезических линии никогда не пересекаются более чем в одной точке; это следует из того, что пары диаметрально противоположных точек, которые содержит наш образ, рассматриваются всегда как одна точка. Аналог плоской геометрии, который имеет место на этой модели поверхности, называется *эллиптической геометрией*, а сама поверхность называется моделью *эллиптической плоскости*. Другую модель эллиптической плоскости, очевидно, можно получить, если исходить из всей шаровой поверхности и рассматривать всякую пару диаметрально противоположных точек как одну точку.

Рассмотрим теперь эллиптическую геометрию, причем будем называть большие круги прямыми, а дуги больших кругов отрезками. Тогда бросаются в глаза два отличия эллиптической геометрии от обычной эвклидовой геометрии. Во-первых, эллиптические прямые суть замкнутые кривые, между тем как эвклидовы прямые имеют бесконечное протяжение. Во-вторых, две эллиптических прямые всегда имеют точку пересечения, между тем ко всякой эвклидовой прямой существуют параллельные линии, не пересекающие ее.

Полностью можно обозреть взаимоотношения эллиптической и эвклидовой геометрии, если исходить из аксиом эвклидовой плоской геометрии и проверить для каждой аксиомы, удовлетворяется ли она также и в эллиптической геометрии или она должна быть заменена несколько иной аксиомой. Мы уже прежде упоминали аксиомы сочетания (стр. 108) и аксиомы непрерывности (стр. 119). Всю эвклидову плоскую геометрию можно полностью построить, исходя из пяти групп аксиом: аксиом сочетания, порядка, конгруэнтности, аксиомы параллельности и аксиом непрерывности. В основе каждой группы аксиом лежат определенные понятия; так, например, для

аксиом сочетания такими понятиями служат понятия точки, прямой и инцидентности. Другие понятия могут возникать лишь в связи с определенными аксиомами, как, например, понятие отрезка или понятие полупрямой возникает в связи с аксиомами порядка. Понятие отрезка в свою очередь есть основа аксиом конгруэнтности, так что аксиомы конгруэнтности требуют для их формулировки определенных аксиом порядка. Приведем теперь аксиомы эвклидовой плоской геометрии [1].

I. Аксиомы сочетания.

1. *Через две точки проходит одна и только одна прямая.*

2. *Всякая прямая содержит по крайней мере две точки.*

3. *Существует по крайней мере три точки, не расположенные на одной и той же прямой.*

II. Аксиомы порядка.

1. *Из трех точек, лежащих на одной прямой, одна лежит необходимо между двумя другими.*

2. *Для каждых двух точек A и B можно найти по крайней мере одну точку C, так что она лежит между A и B.*

3. *Если прямая пересекает одну сторону некоторого треугольника (т. е. содержит точку, расположенную между двумя вершинами), то она либо проходит через вершину противоположного угла, либо пересекает еще одну сторону треугольника.*

Аксиомы порядка позволяют определить понятие, встречающееся в следующих аксиомах, именно: понятие «отрезка», «угла», «стороны прямой по отношению к какой-нибудь точке», «полупрямой», «стороны плоскости по отношению к полупрямой».

III. Аксиомы конгруэнтности.

1. *Всякий отрезок всегда может быть отложен на прямой по обе стороны от некоторой точки прямой; получающиеся отрезки называются конгруэнтными с первым отрезком.*

2. *Если два отрезка конгруэнтны с третьим, то они также конгруэнтны друг с другом.*

3. *Если на двух конгруэнтных отрезках имеется по одной точке такого рода, что одна из получающихся частей одного отрезка конгруэнтна с одной из частей второго отрезка, то и вторая часть первого отрезка конгруэнтна со второй частью второго.*

4. *Угол может быть отложен на плоскости по обе стороны от некоторой полупрямой однозначно; получающийся угол называется конгруэнтным с первоначальным.*

5. (*Первая теорема конгруэнтности.*) *Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника совпадают с двумя сторонами и углом, заключенным между ними, другого треугольника, то треугольники конгруэнтны.*

---

[1] См. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Berlin 1930. Имеется русский перевод с 5-го немецкого издания: Давид Гильберт, Основания геометрии, перевод А. В. Васильева, изд. «Сеятель», Петроград 1923.

IV. Аксиома параллельности.

Ко всякой прямой a через всякую точку, не лежащую на этой прямой, можно провести одну и только одну прямую, не пересекающую прямой a.

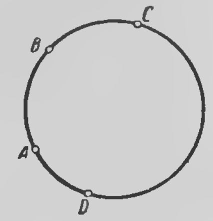
V. Аксиомы непрерывности.

Эти аксиомы формулируются весьма различно. Во всяком случае они означают примерно следующее:

1. (Аксиома Архимеда, стр. 119.) *Всякий отрезок можно измерить при помощи любого другого.*

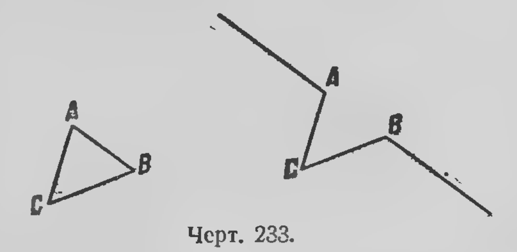
2. (Аксиома Кантора.) *Во всякой бесконечной последовательности вложенных друг в друга отрезков существует всегда общая всем этим отрезкам точка.*

В эллиптической геометрии аксиомы сочетания, очевидно, выполняются. Наоборот, аксиомы порядка не выполняются; так как прямые в этом случае представляют собой замкнутые линии подобно окружностям, то нельзя сказать относительно трех точек прямой, что одна из них лежит между двумя другими. Вместо отношения «между» для трех точек в эллиптической геометрии можно ввести отношение разделения четырех точек, для которых имеют место соответствующие аксиомы порядка. Первая из них гласит: *четыре точки прямой всегда распадаются одним единственным способом на две разделяющие друг друга пары* (например на черт. 232 точки A, B, C, D распадаются на разделяющие друг друга пары AC и BD).



Черт. 232.

Подобно эвклидовым аксиомам порядка эллиптические аксиомы порядка также приводят к определению отрезка и к другим понятиям, которые применяются в аксиомах конгруэнтности. При этом, однако, следует исходить из того, что две точки AB всегда определяют два отрезка, а не один, подобно тому как всякая окружность разбивается двумя своими точками на две дуги. Только добавляя третью точку C прямой AB, можно установить различие между обоими отрезками AB; один отрезок состоит из всех точек, отделяемых парой AB от точки C, а другой — из остальных точек прямой AB. Далее следует исключить углы, бóльшие двух прямых, из внутренних углов треугольника, иначе две стороны и заключенный между ними угол определяли бы не единственный треугольник, а два неконгруэнтных треугольника (черт. 233), что противоречит первой теореме конгруэнтности[1]). Оказывается, что при таких огра-



Черт. 233.

[1]) Заметим, что правый треугольник черт. 233 не разбивает эллиптической плоскости.

ничениях во всякой достаточно малой области эллиптической плоскости сохраняется аналогия с областью эвклидовой плоскости, от которой мы исходили, и что эвклидовы аксиомы конгруэнтности выполняются на эллиптической плоскости. То же самое имеет место для аксиом непрерывности.

Наоборот, аксиома параллельности не выполняется, а должна быть заменена установленной уже на стр. 108 аксиомой сочетания проективной плоскости: две прямые всегда имеют одну единственную точку пересечения.

По отношению к порядку эллиптическая плоскость ведет себя так же, как проективная. Чтобы сделать это наглядней, возьмем в качестве модели эллиптической плоскости полную поверхность шара, на которой все пары диаметрально противоположных точек отождествлены. Если мы будем проектировать шар из его центра на плоскость, то всякая точка плоскости соответствует паре диаметрально противоположных точек шара, т. е. одной точке эллиптической плоскости. Всякому большому кругу, т. е. всякой эллиптической прямой, соответствует прямая пересечения плоскости большого круга с плоскостью изображения. Это отношение станет взаимно однозначным, если мы примем во внимание также бесконечно удаленные прямые плоскости изображения, т. е. если мы эту плоскость будет рассматривать как проективную.

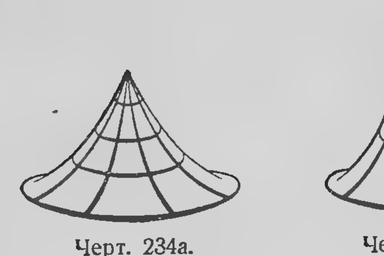
В соответствии с этим мы можем рассматривать проективную плоскость непосредственно как модель эллиптической плоскости, если будем определять равенство длин и углов на этой модели не как в эвклидовой геометрии, а указанным способом при помощи сферической тригонометрии вспомогательного шара. Отсюда следует, что в эллиптической геометрии все теоремы о точках пересечения, имеющие место в проективной геометрии, например теоремы Дезарга и Паскаля, выполняются.

Если теперь принять во внимание только отображения эллиптической плоскости, сохраняющие длину, то можно поставить вопрос, так же как в случае эвклидовой геометрии, о дискретных группах подобных отображений. Всякой такой группе соответствует дискретная группа отображений шаровой поверхности, сохраняющих длину, следовательно, одна из групп правильных многогранников, рассмотренных нами в § 13 и 14. Обратно, всякий правильный многогранник приводит к дискретной группе совмещений эллиптической плоскости, а центральные проекции правильных многогранников, представленные на черт. 160—163 и 165—168, дают некоторые решения связанной с этими группами задачи, которая была сформулирована на стр. 79 для эвклидовой плоскости.

Можно определить эллиптическую геометрию не только на плоскости, но и в пространстве. В качестве моделей точек, прямых и плоскостей этого пространства можно использовать проективное пространство с его точками и прямыми. Сравнение длин и углов при этом опять-таки следует проводить не так, как в эвклидовой геометрии; оно может быть описано лишь аналитически, например при помощи центральной проекции гипершара четырехмерного пространства. Дискретные группы наложений эллиптического пространства связаны с правильными клетками четырех-

мерного пространства, и черт. 173—176 можно истолковать как «замощение» эллиптического пространства.

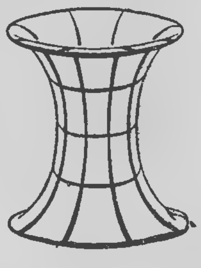
35. Гиперболическая геометрия. Ее взаимоотношения с эвклидовой и эллиптической геометрией. Обратимся теперь к поверхностям с постоянной отрицательной кривизной. Среди них нет поверхностей такого простого вида, как шар. Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны могут иметь три различные формы, изображенные на черт. 234. Мы видим, что все эти поверхности имеют особенные границы, за пределы которых они не могут быть продолжены непрерывно[1]). Совокупность всех поверхностей с постоянной отрицательной кривизной не удалось до сих пор выявить, но можно показать, что ни одна из этих поверхностей не может быть свободна от особенностей.



Черт. 234а.



Черт. 234б.



Черт. 234в.

Таким образом нет поверхностей в пространстве, которые могли бы быть отображены в окрестности любой точки (im Kleinen) с сохранением длин на поверхности с постоянной отрицательной кривизной, таких, на которых нанесение геодезических отрезков нигде не встречало бы граничных точек. Однако можно дать на плоскости модели подобных абстрактно определенных поверхностей, точно так же как мы пользовались проективной плоскостью в качестве модели эллиптической плоскости. Для этой цели мы должны ввести новый способ измерения длин и углов, отличный от способов, применяемых в эвклидовой и эллиптической геометриях. Поверхность, модель которой мы хотим таким образом построить, называется *гиперболической плоскостью*, геометрия — *гиперболической геометрией.*

В качестве точек гиперболической плоскости будем рассматривать точки, лежащие внутри некоторого круга обычной плоскости, а в качестве гиперболических прямых — хорды этого круга (концы которых исключаются из рассмотрения).

Для всякого куска поверхности F постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{c^2}$ можно задать отображение, переводящее F во внутреннюю область G круга таким образом, что геодезические линии, проходящие на поверхности F, будут преобразовываться в отрезки прямых на G. Понятно, что это отображение не может сохранять длину, так как кри-

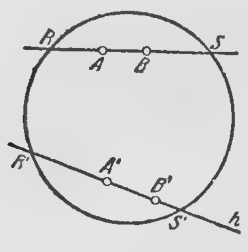
---

1) На черт. 234б только нижняя граница особенная, вверх же поверхность удаляется в бесконечность, причем круги широт безгранично уменьшаются.

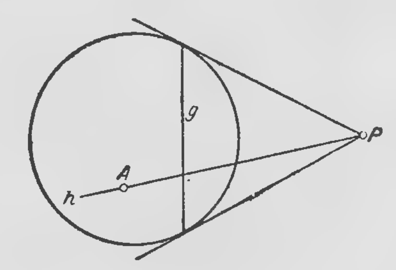
визна G равна нулю, в то время как кривизна поверхности F отрицательна. Пусть A, B (черт. 235) — образы двух точек P, Q поверхности F и пусть R, S — концевые точки хорды круга, проходящей через A, B; геодезическое расстояние s точек P и Q удовлетворяет формуле:

$$s = \frac{c}{2} \left| \ln \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right|. \tag{1}$$

Правую часть равенства (1) для всех пар точек нашей модели гиперболической плоскости будем называть «гиперболическим расстоянием». Отображение $F \rightarrow G$ приводит также к определенному измерению «гиперболических углов», отличающемуся от способа определения углов в эвклидовой геометрии. Так, например, чтобы опустить перпендикуляр h из точки A гиперболической плоскости на прямую g, нужно провести h в виде







Черт. 235. Черт. 236.

прямой, соединяющей точку A с вспомогательной точкой P (черт. 236). Легко усмотреть, что эвклидов угол между прямыми h и g, вообще говоря, отличен от прямого.

Посмотрим теперь, какие аксиомы эвклидовой геометрии сохраняются на гиперболической плоскости. Прежде всего ясно, что аксиомы сочетания выполняются. Если далее мы определим понятие «между» для трех точек, исходя из их расположения на нашей модели, то можно видеть, что и аксиомы порядка выполняются. В качестве отрезка AB определим точки эвклидова отрезка на нашей модели. В основу определения конгруэнтности отрезков положим формулу (1). Если теперь рассмотрим первую аксиому конгруэнтности, то могло бы показаться, что свободному нанесению отрезка мешает граница круга и что, следовательно, аксиома не выполняется. В действительности же при определении расстояния по формуле (1) нанесению отрезков окружность круга никогда не мешает. Пусть даны внутри круга отрезок AB (черт. 235) и некоторая полупрямая h, выходящая из точки A'. Тогда для точки B' на прямой h, для которой должно быть $AB = A'B'$, выполняется на основании (1) соотношение:

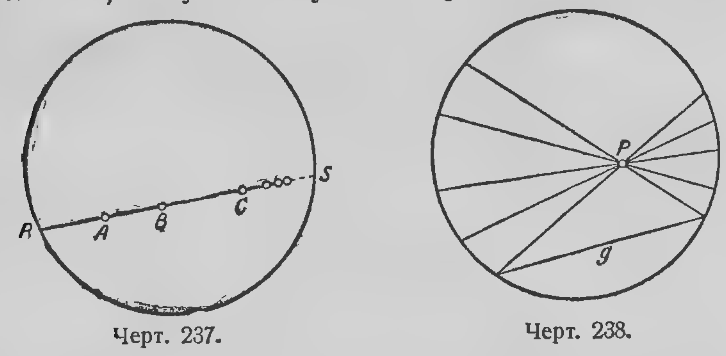
$$\frac{AR}{BR} \cdot \frac{BS}{AS} = \frac{A'R'}{B'R'} \cdot \frac{B'S'}{A'S'}$$

или

$$\frac{B'S'}{B'R'} = \frac{A'S'}{A'R'} \cdot \frac{AR}{AS} \cdot \frac{BS}{BR}. \tag{2}$$

Так как три точки A, A', B лежат внутри круга, то все три отношения в правой части равенства (2) отрицательны. Следовательно, $\frac{B'S'}{B'R'}$ также отрицательно, т. е. точка B' лежит внутри круга, как мы и утверждали. Если прикладывать некоторый отрезок произвольное число раз к самому себе, то можно сколь угодно близко подойти к периферии круга, не достигая ее (черт. 237); периферия круга играет в нашей модели гиперболической геометрии такую же роль, как бесконечно удаленная прямая в эвклидовой геометрии.

Наше рассмотрение показывает, что первая аксиома конгруэнтности выполняется на гиперболической плоскости. Очевидно, выполняются также аксиомы конгруэнтности вторая, третья и четвертая. Пятая аксиома конгруэнтности, как уже было указано в § 34, равнозначна существованию достаточно общей группы отображений, переводящих внутренность круга в самое себя таким образом, что при этом прямые переходят в прямые же, а гиперболические расстояния и углы сохраняются неизменными. В проективной геометрии на плоскости доказывается, что подобная группа действительно существует (эти отображения принадлежат к проективным преобразованиям плоскости и могут быть наглядно представлены при помощи повторного применения центральной проекции). Отсюда следует, что в гиперболической геометрии выполняются те же аксиомы конгруэнтности. Легко видеть, что и аксиомы непрерывности выполняются.



Черт. 237. Черт. 238.

Только одна единственная аксиома эвклидовой геометрии не выполняется на гиперболической плоскости — аксиома параллельности. Это можно усмотреть из черт. 238. Через всякую точку ко всякой прямой g, не проходящей через эту точку, всегда можно провести пучок прямых, не пересекающих прямой g. В то время как в эллиптической геометрии помимо аксиомы параллельности не выполняются также эвклидовы аксиомы порядка, гиперболическая геометрия отличается от эвклидовой только тем, что в ней не выполняется аксиома параллельности.

На этом основании наша модель приобретает большое принципиальное значение. В течение всего средневековья и вплоть до начала XIX в. напрасно старались доказать аксиому параллельности, исходя из остальных аксиом Эвклида. Открытие модели гиперболической геометрии показало принципиальную невозможность подобного доказательства, ибо наша модель удовлетворяет всем аксиомам эвклидовой геометрии, за

исключением аксиомы параллельности. Если бы эту последнюю можно было логически вывести из остальных, то она должна была бы выполняться и на нашей модели, что не имеет места.

Гиперболическая и эллиптическая геометрии называются неэвклидовыми геометриями. Если исходить из распределения значений гауссовой кривизны, то эвклидова геометрия получается как переходная между эллиптической и гиперболической геометриями. В этом можно убедиться и с другой точки зрения. Так, мы получали гиперболическую плоскость путем удаления внешних точек некоторого круга на эвклидовой плоскости, между тем как для получения всей эллиптической плоскости нам нужно было добавлять к эвклидовой плоскости еще точки бесконечно удаленной прямой. Далее, в эллиптической геометрии нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной прямой, через точку, лежащую вне ее; в эвклидовой геометрии можно провести одну такую прямую, а в гиперболической геометрии — бесконечное множество параллельных прямых. Особенно характерной для трех геометрий является сумма углов треугольника. В то время как в эвклидовой геометрии она равна π, в эллиптической геометрии она всегда больше π, как это следует из известных теорем сферической геометрии; в гиперболической плоскости эта сумма всегда меньше π. Ниже мы приведем наглядные доказательства этого.

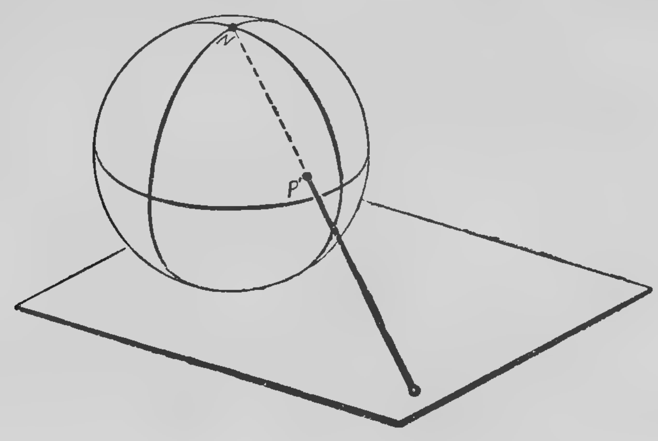
Теорема эвклидовой геометрии, что сумма углов всякого треугольника равна π, поэтому не может быть доказана без использования аксиомы параллельности, так как в противном случае эта теорема должна была бы иметь место и в гиперболической плоскости. В то же время, если какая-нибудь теорема имеет место как в эвклидовой, так и в гиперболической геометрии, то для ее доказательства эвклидова аксиома параллельности заведомо не нужна. В качестве примера такой теоремы можно привести теорему, что всякий внешний угол треугольника больше, чем любой из двух, не смежных с ним внутренних углов треугольника. Из рассмотрения сферических треугольников легко убедиться, что в эллиптической геометрии эта теорема не имеет места. Отсюда следует, что для ее доказательства необходимо использовать эвклидовы аксиомы порядка.

Примером теоремы, имеющей место во всех трех геометриях, может служить теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. Отсюда следует, что для доказательства этой теоремы не нужны ни эвклидовы аксиомы порядка, ни какие-нибудь предположения относительно параллельности.

Мы уже указывали, что проективные теоремы о точках пересечения, например теорема Дезарга, выполняются в эллиптической плоскости. В эвклидовой плоскости эта теорема, как и всякая другая теорема о точках пересечения, имеет место лишь в том случае, если принимать во внимание и бесконечно удаленные точки. В гиперболической плоскости теоремы о точках пересечения только в том случае можно сформулировать, не оговаривая исключений, если принять во внимание два различных вида несобственных точек: точки, которые соответствуют точкам периферии в нашей модели, и точки, соответствующие точкам, внешним по отношению к кругу. Очевидно, мы можем, например, для некоторой дезарговой конфигурации на плоскости провести окружность, определяющую нашу модель гиперболической плоскости, так, что она будет

содержать девять точек конфигурации внутри и десятую на периферии или во-вне. Вследствие правильности конфигурации мы можем рассматривать эту точку как дезаргову; тогда мы можем представить себе нашу фигуру как два гиперболических треугольника, соответствующие стороны которых пересекают попарно друг друга в точках гиперболической прямой. Согласно дезарговой теореме, линии, соединяющие соответствующие вершины углов, проходят через одну точку, между тем как эти прямые внутри круга не имеют общей точки.

Если попытаться доказать дезаргову теорему в гиперболической геометрии непосредственно, не обращаясь к нашей модели, то здесь встречаются те же трудности, как и в эвклидовой и проективной геометриях. Эту теорему можно доказать при помощи аксиомы конгруэнтности. Без нее для доказательства этой теоремы необходимы пространственные



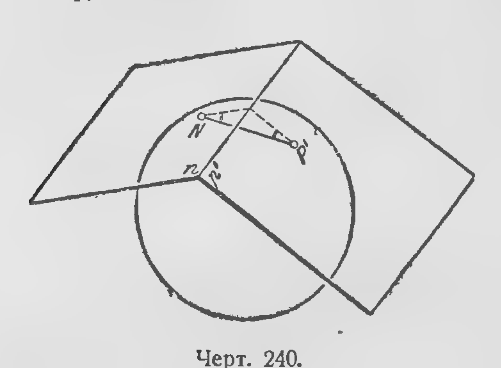
Черт. 239.

вспомогательные средства. Именно, в пространстве также существует гиперболическая геометрия. Модель гиперболического пространства можно получить, если рассматривать в качестве точек, прямых и плоскостей этого пространства точки, отрезки прямых и куски плоскостей, лежащие внутри сферы обыкновенного пространства, и если определять расстояния между двумя точками аналогично определению расстояния в плоской модели.

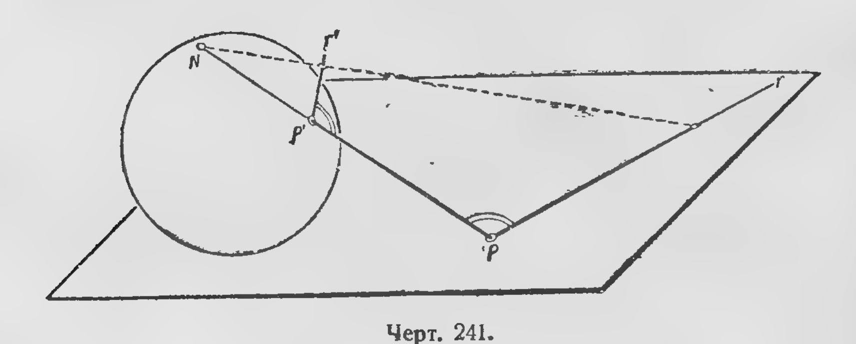
Мы уже упоминали, что сумма углов треугольника в гиперболической плоскости всегда меньше π. На нашей модели этого нельзя заметить, так как гиперболические углы отличны от эвклидовых. Поэтому в следующем параграфе мы рассмотрим другую модель гиперболической плоскости, построенную из модели, рассмотренной до сих пор; в этой новой модели гиперболические углы будут изображаться без искажений. Для этой цели нам придется исходить из простого учения элементарной геометрии — учения о стереографической проекции и о преобразованиях, сохраняющих окружности.

36. Стереографическая проекция и преобразования, сохраняющие окружности. Модель Пуанкаре гиперболической плоскости. Пусть шар лежит на горизонтальной плоскости (черт. 239). Из верхнего полюса N

шара будем проектировать точки поверхности шара на эту плоскость. Получающееся таким образом отображение поверхности шара на плоскость ($P' \rightarrow P$, черт. 239) называется стереографической проекцией. При этом вся плоскость будет отображена на всю поверхность шара, за исключением точки N. Плоскость проекции параллельна касательной плоскости шара в точке N. Далее, если p' есть касательная плоскость к шару в точке P' (черт. 240), то вследствие всесторонней симметрии шара обе касательные плоскости n и p' образуют равные углы с хордой NP', соединяющей точки касания, а линия пересечения плоскостей n и p' перпендикулярна к NP. Так как плоскость n параллельна плоскости проекции, то и плоскость проекции образует с лучом PP' такой же угол, как плоскость p', и пересекает плоскость p' по прямой, перпендикулярной к PP'. Отсюда вытекают некоторые наглядные свойства стереографической проекции. Пусть сначала r' есть касательная к шару в точке P' (черт. 241); если r есть проекция касательной r', то r и r



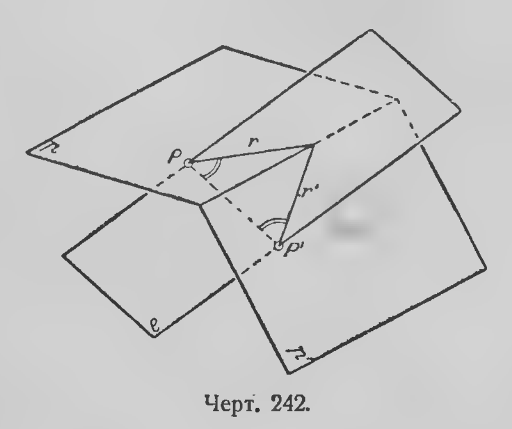
Черт. 240.



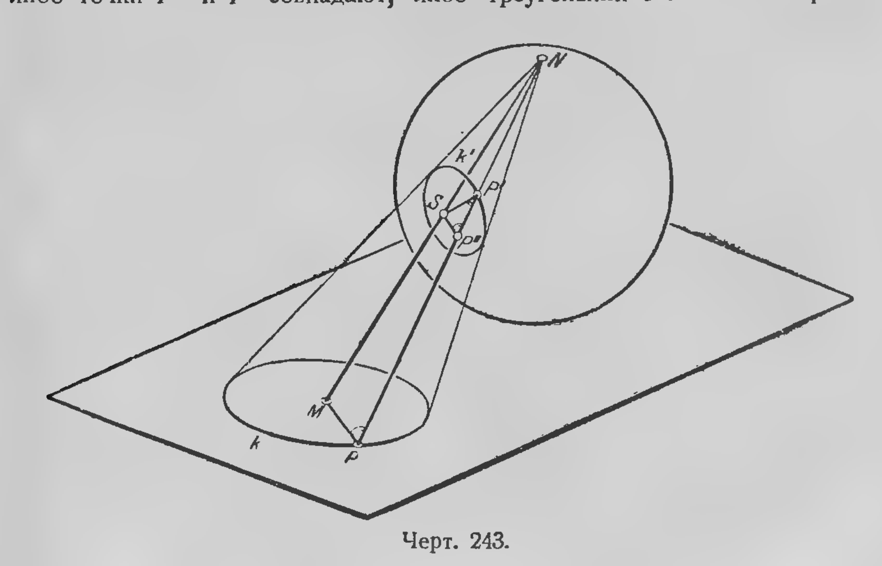
Черт. 241.

образуют одинаковые углы с прямой PP'. В самом деле, мы получаем прямую r как пересечение плоскости проекции с плоскостью, проходящей через r' и NP'; но если некоторая плоскость e, проходящая через PP', пересекает по прямым r и r' (черт. 242) две плоскости p и p', образующие с прямой PP' одинаковые углы и пересекающиеся по прямой, перпендикулярной к PP', то и прямые r и r' образуют равные углы с PP'. Далее соображения симметрии показывают, что если s' есть другая касательная к шару в точке P' и s есть проекция касательной s', то прямая r в пересечении с прямой s образует такой же угол, как прямые r' и s'. Следовательно, *при стереографическом проектировании углы на шаре не искажаются в проекции*. Поэтому такое отображение называют *отображением с сохранением* углов.

Пусть далее k' — произвольная окружность на шаре, не проходящая через точку N (черт. 243). Касательные плоскости к шару в точках этой окружности огибают некоторый конус вращения; пусть вершина этого конуса есть S. Так как окружность k' не проходит через точку N, то NS не будет касательной к шару в точке N и, следовательно, не будет параллельна плоскости проекции; пусть M будет точкой пересечения плоскости проекции с NS. Мы утверждаем, что кривая k, изображающая окружность k' на плоскости проекции, есть окружность с центром в точке M. Доказательство легко усмотреть из черт. 243. Если P' есть произвольная точка окружности k', а P — ее проекция, то $P'S$ есть касательная к шару в точке P', а PM — проекция касательной $P'S$; отсюда $\sphericalangle PP'S = \sphericalangle P'PM$. Проведем через точку S прямую, параллельную PM, и пусть эта прямая пересекает NP в точке P''. Тогда либо точки P'' и P' совпадают, либо треугольник $P'P''S$ имеет равные



Черт. 242.



Черт. 243.

углы при точках P' и P'' и, следовательно, этот треугольник равнобедренный:

$$SP' = SP'',$$

но

$$\frac{PM}{P'S} = \frac{PM}{P''S} = \frac{MN}{SN} \quad \text{или} \quad PM = P'S \cdot \frac{MN}{SN}.$$

Так как точка S одинаково удалена от всех точек окружности k', то $P'S$ постоянна. Из последней формулы следует, что и PM постоянная, т. е. кривая k есть окружность с центром в точке M.

Таким образом все окружности на шаре, не проходящие через точку N, при стереографической проекции изображаются на плоскости в виде окружностей, и, обращая только что проведенное исследование, можно видеть, что также и всякая окружность на плоскости переходит в окружность на шаре. Когда некоторый круг, подвижный на шаре, приближается к кругу, проходящему через точку N, то прямая NS приближается к касательной к шару в точке N, а точка M удаляется в бесконечность. Отсюда следует, что кругам, проходящим через точку N шара, соответствуют на плоскости проекций прямые. Это ясно и без перехода к пределу, так как лучи, проектирующие точки окружности, проходящей через точку N шара, расположены в плоскости этого круга, так что прямая, получающаяся в пересечении этой плоскости с плоскостью проекции, служит проекцией нашей окружности. Таким образом совокупности окружностей на шаре соответствуют в стереографической проекции совокупности окружностей и прямых на плоскости. Стереографическая проекция сохраняет окружности.

Возьмем теперь какое-нибудь отображение a' шара на самого себя, при котором окружности на шаре переходят в окружности; так, например, a' может быть вращением шара вокруг произвольного (не обязательно проходящего через точку N) диаметра. Тогда отображению a' при стереографической проекции соответствует некоторое отображение a плоскости проекций на самое себя, при которой совокупность окружностей и прямых переходит в самое себя. Всякое такое отображение плоскости называется преобразованием, сохраняющим окружности.

На эвклидовой плоскости преобразования, сохраняющие окружности, вообще говоря, не представляют взаимно однозначных отображений. В самом деле, при стереографической проекции точке N шара не соответствует никакая точка плоскости. В общем случае отображение a' шара не оставляет точку N неподвижной, а преобразует в точку N некоторую другую точку P', стереографическая проекция которой пусть будет P. Тогда точка P при преобразовании a, сохраняющем окружности, которое соответствует отображению a', не будет иметь никакого изображения. Здесь, так же как в проективной геометрии, для объединения всего процесса отображений необходимо провести абстрактное расширение эвклидовой плоскости. Однако это расширение в учении о преобразованиях, сохраняющих окружности, производится другим способом, чем в проективной геометрии; именно, к эвклидовой плоскости добавляют единственную «бесконечно удаленную» точку U, которую представляют себе как изображение точки N при стереографической проекции. После такого расширения плоскость может быть взаимно однозначно и непрерывно отнесена ко всей поверхности шара, а преобразования, сохраняющие окружности, превращаются во взаимно однозначные отображения; в приведенном выше примере точка P при преобразовании, сохраняющем окружности, отображается в точку U. При соответствующем отображении шара a' окружности, проходящие через P', переходят в окружности,

проходящие через N; следовательно, отображение a переводит окружности, проходящие через точку P, в прямые. В соответствии с этим представляется целесообразным рассматривать прямые как окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку. Параллельные прямые при преобразовании, сохраняющем окружности, переходят либо в параллельные же прямые, либо в соприкасающиеся окружности.

Тривиальными примерами преобразований, сохраняющих окружности, служат движения, перевертывания и преобразования подобия плоскости; они переводят эвклидову плоскость взаимно однозначно в самое себя. Следовательно, если положить в основу этих преобразований дополненную точкой U плоскость, то можно сказать, что эти преобразования суть преобразования, сохраняющие окружности, оставляющие неподвижной точку U. Можно доказать обратно, что единственные преобразования, сохраняющие окружности, оставляющие неподвижной точку U, суть только что названные. На основе этой теоремы можно обозреть полностью все преобразования плоскости, сохраняющие окружности. Пусть P — точка плоскости, которая при заданном преобразовании a_0, сохраняющем окружности, переходит в точку U, и пусть P — стереографическая проекция точки шара P'. Дадим теперь шару такое вращение a', при котором точка P' переходит в точку N. Вращению a' соответствует преобразование a, сохраняющее окружности, свойства которого связаны простым наглядным образом со свойствами вращения a'. Заданное преобразование a_0, сохраняющее окружности, которое точно так же, как a, переводит точку P в точку U, может отличаться от преобразования a только преобразованием, сохраняющим окружности, которое оставляет точку U неподвижной. Поэтому согласно только что приведенной теореме преобразование a_0 тождественно с a с точностью до движения, перевертывания или преобразования подобия.

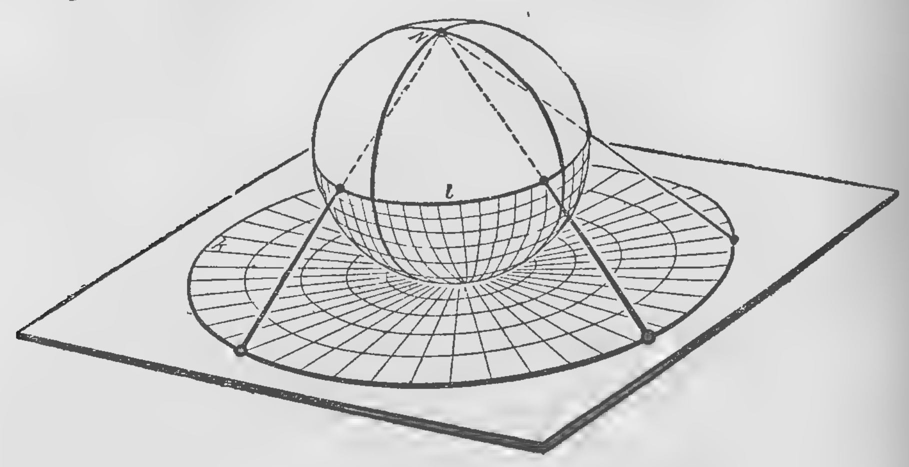
Выше мы уже упоминали, что стереографическая проекция сохраняет углы неизменными. Вращение a' представляет отображение шара с сохранением углов, а так как a получается из a' при помощи стереографической проекции, то a представляет отображение плоскости с сохранением углов; a_0 отличается от a только на отображение с сохранением углов. Отсюда следует, что *все преобразования, сохраняющие окружности, сохраняют неизменными углы.*

Связь отображений a и a' наглядно представлена на черт. 244а и б, выделением окружности k проходящей через точку P плоскости, которая является стереографической проекцией большого круга l шара. Отображение a' переводит большой круг l в большой круг n, проходящий через точку N, стереографической проекцией которого служит прямая g. Таким образом отображение a переводит окружность k в прямую g. Из чертежа можно усмотреть далее, что внутренность и внешность окружности k переходят в полуплоскости, ограниченные прямой g, что, впрочем, ясно из соображений непрерывности.

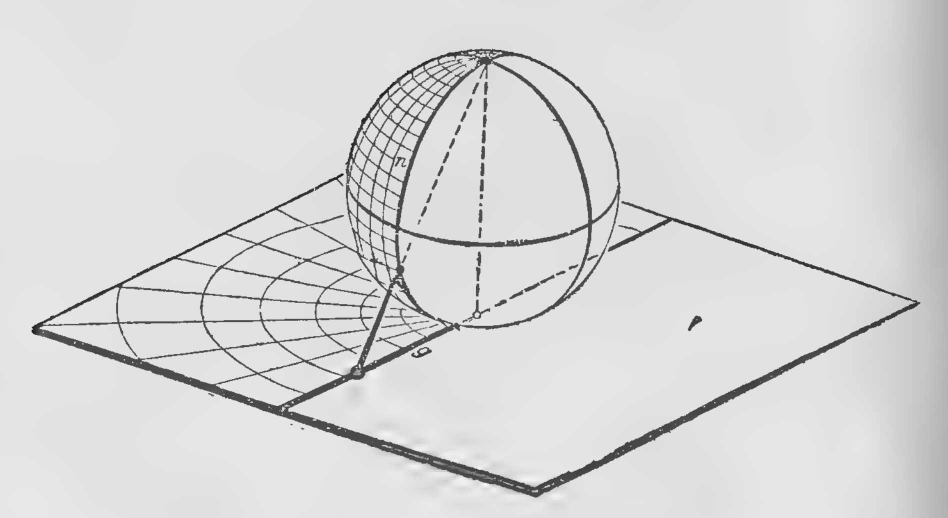
Перевертывание u плоскости вокруг прямой g является преобразованием, сохраняющим окружности. В соответствии с этим отображение $i = aua^{-1}$ представляет собой преобразование, сохраняющее окружности, которое сохраняет неподвижными точки окружности k, а внутренность и внешность этого круга переводит друг в друга. Отображение i назы-

вается инверсией или зеркальным отражением по отношению к кругу k. Это отображение особенно важно, и поэтому мы его рассмотрим несколько подробнее.

Пусть h представляет окружность, пересекающую ортогонально в некоторой точке R окружность k (черт. 245). Тогда окружности h и k



Черт. 244а.

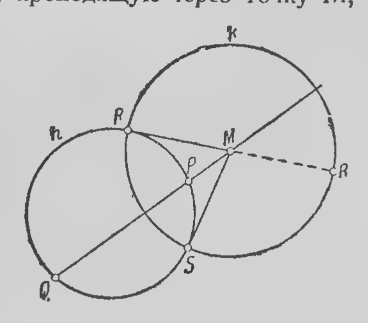


Черт. 244б.

имеют еще одну общую точку S, в которой они также пересекаются ортогонально. Касательные к окружности h в точках R и S суть радиусы окружности k, которые пересекаются в центре M окружности k; следовательно, центр M лежит вне круга h. Инверсия i переводит окружность h в другую окружность h', также проходящую через точки R и S,

так как эти точки остаются неизменными. Окружность h' вследствие сохранения углов при инверсии должна также пересекать окружность k в точках R и S ортогонально. Но это возможно лишь в том случае, если h' тождественна с h. Таким образом инверсия i переводит всякую окружность h, пересекающую ортогонально окружность k, в самое себя. Так как при этом преобразовании внутренность и внешность круга k переходят одна в другую, то и обе дуги окружности h, на которые эта окружность разбивается окружностью k, также должны поменяться местами.

Рассмотрим тепер. некоторую прямую l, проходящую через точку M, например прямую RM; пусть эта прямая пересекает окружность k во второй точке R' (черт. 245); тогда прямая l должна перейти в окружность или в прямую l' так, что l' будет перпендикулярна к k в точках R и R'. Это возможно только в том случае, если l' тождественна с l. Поэтому преобразование инверсии переводит все диаметры круга k в самих себя. Так как эти прямые на расширенной плоскости имеют помимо точки M еще одну общую точку, именно бесконечно удаленную точку U, то точки M и U должны переходить одна в другую. Следовательно, совокупность прямых, не проходящих через точку M, и совокупность окружностей, проходящих через точку M, должны взаимно переходить друг в друга.



Черт. 245.

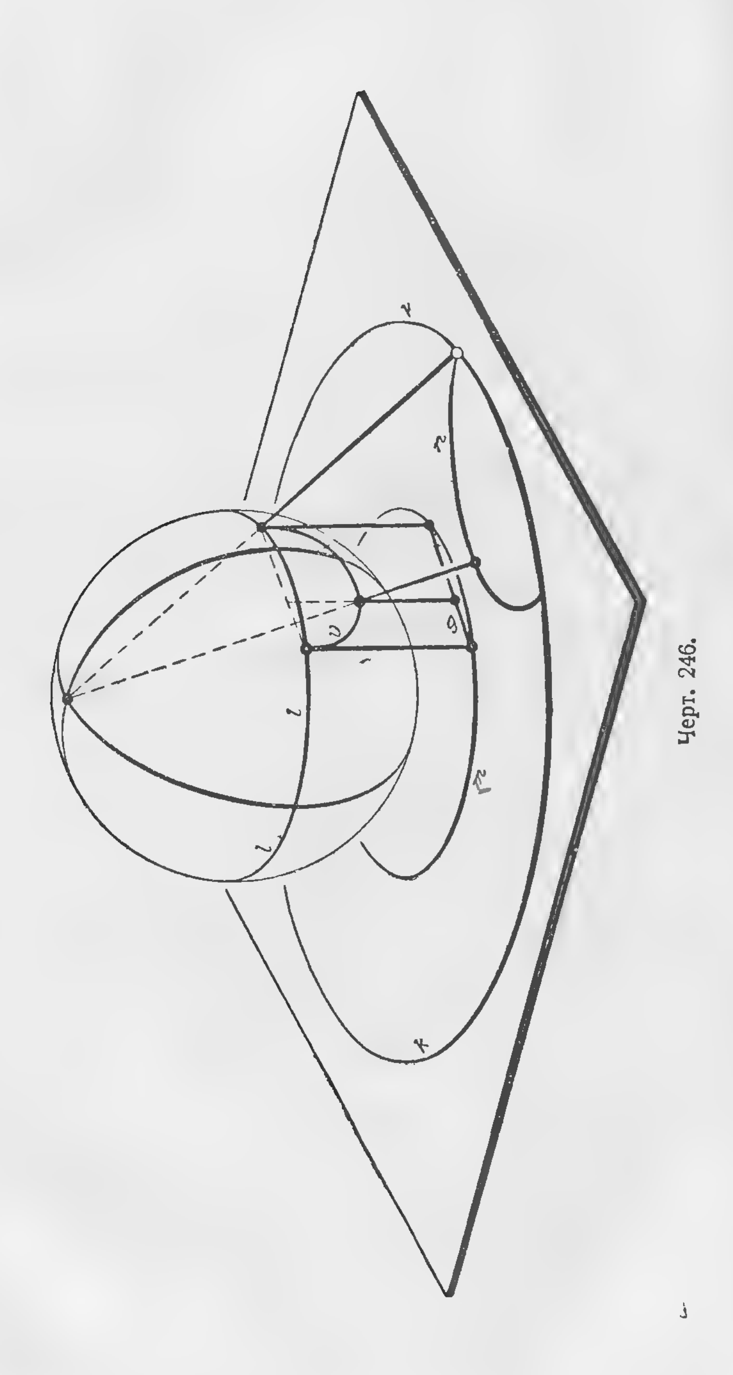
Пусть теперь имеем точку P окружности h, отличную от точек R и S. Тогда при инверсии i изображением точки P может быть только вторая точка пересечения Q прямой MP с окружностью h, так как прямая MP, так же как и окружность h, переходит в самое себя. Согласно элементарной теореме относительно произведения отрезков хорд в круге имеем:

$$MP \cdot MQ = MR^2.$$

Точка Q называется инверсией точки P относительно окружности k; мы нашли способ определять для каждой точки P инверсию ее относительно окружности k и без вспомогательной окружности h. Именно, пусть r — радиус окружности k; тогда точку Q, представляющую инверсию точки P, мы можем определить на полупрямой MP, выходящей из точки M, так, чтобы удовлетворялось равенство

$$MP \cdot MQ = r^2.$$

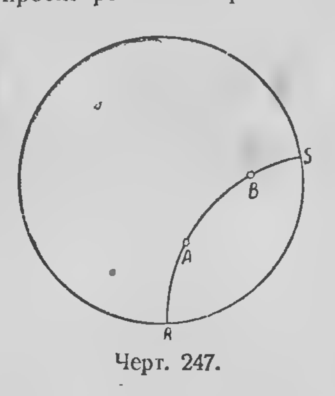
Можно доказать, что всякое преобразование, сохраняющее окружности, можно свести максимум к четырем инверсиям. Мы рассмотрим особо совокупность преобразований, сохраняющих окружности, которые переводят определенный круг k вместе с его внутренностью в самого себя. Эти отображения, очевидно, образуют группу H. Пусть n — круг, ортогональный к k; тогда инверсия относительно n во всяком случае принадлежит к группе H. Можно показать, что всякое отображение, принадлежащее группе H, можно получить тремя инверсиями, основные окружности ко-



Черт. 246.

торых ортогональны к k, т. е. такими тремя инверсиями, которые сами принадлежат к группе H.

Теперь поставим наши исследования в связь с моделью гиперболической плоскости, которую мы построили в предыдущем параграфе. Пусть гиперболическая плоскость представлена внутренностью круга m в горизонтальной плоскости. Положим на плоскость шар в точке, представляющей центр круга; пусть шар имеет радиус, равный радиусу этого круга (черт. 246). Будем теперь проектировать круг m и его внутренность вертикальными прямыми на нижнее полушарие, ограниченное большим кругом l, конгруэнтным с окружностью m. При этом наше полушарие превратится в новую модель гиперболической плоскости. Всякая хорда g круга m переходит в полуокружность v на шаре, ортогональную к окружности l. Поэтому эти полуокружности следует теперь рассматривать как изображение гиперболических прямых. Теперь будем стереографически проектировать это полушарие обратно на плоскость; при этом наша проекция займет некоторый круг k. Внутренность этого круга, таким образом, превратилась в новую модель гиперболической плоскости. На этой модели полуокружность v вследствие сохранения углов и окружностей при стереографическом проектировании переходит в дугу окружности n, ортогональную к окружности k. К этим дугам окружностей следует конечно добавить диаметры окружности k как предельные случаи.



Черт. 247.

Рассмотрим более подробно эту новую модель, предложенную Пуанкаре. Из нашего рассмотрения следует, что совокупность дуг окружностей, ортогональных к k, можно взаимно однозначным способом поставить в соответствие с совокупностью хорд другой окружности m. В силу этого две точки A и B внутри круга k мы всегда можем соединить только одной такой дугой. Пусть R и S — две точки пересечения такой дуги с окружностью k (черт. 247); тогда мы можем получить гиперболическое расстояние между точками A и B из формулы (1) на стр. 214. Действительно, пусть $A'B'R'S'$ — те точки первоначальной модели, из которых при описанном построении возникли точки $ABRS$; тогда при помощи теорем проективной геометрии можно установить соотношение:

$$\frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} = \sqrt{\frac{A'R' \cdot B'S'}{B'R' \cdot A'S'}}. \tag{1}$$

Отсюда для гиперболического расстояния s между точками A и B нашей новой модели получается формула:

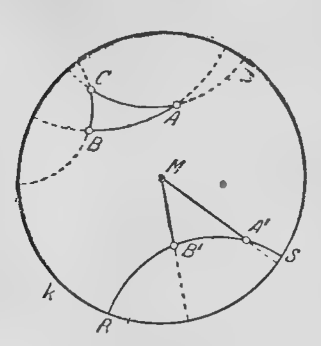
$$s = c \left| \ln \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right|. \tag{2}$$

Всякое движение гиперболической плоскости вдоль самой себя должно соответствовать некоторому отображению a внутренности круга k, которое переводит в самое себя совокупность дуг окружностей, ортого-

нальных к окружности k. Вполне очевидно и может быть строго доказано, что такое отображение представляет преобразование, сохраняющее окружности, и, следовательно, принадлежит к рассмотренной выше группе H. Помимо того можно доказать, что группа H тождественна с группой всех гиперболических движений[1]. Теперь ясно, что отображения группы H как преобразования, сохраняющие окружности, сохраняют неизменными углы, а также гиперболические углы, так как эти отображения представляют гиперболические движения. Отсюда следует, что эвклидовы углы в модели Пуанкаре должны быть пропорциональны гиперболическим углам с постоянным коэфициентом пропорциональности, а так как полный угол, равный 2π гиперболической плоскости, должен оставаться неизменным, то коэфициент пропорциональности должен равняться единице. *Модель Пуанкаре должна сохранять углы неизменными.*

Можно установить аналитически формулу преобразования для непосредственного отображения заданного куска поверхности постоянной отрицательной кривизны с сохранением углов на кусок плоскости внутри окружности k так, что при этом геодезические линии отобразятся в виде дуг окружностей, ортогональных к окружности k.

Проследим теперь доказательство теоремы, приведенной на стр. 216, что сумма углов треугольника в гиперболической геометрии всегда меньше π. Будем исходить из произвольного треугольника ABC и возьмем за основу модель Пуанкаре (черт. 248). Согласно аксиомам конгруэнтности, которые сохраняют силу в гиперболической геометрии, мы можем начертить треугольник $A'B'M$, конгруэнтный треугольнику ABC, причем точка M, соответствующая точке C, будет центром окружности k. Но мы видели (стр. 223), что всякая окружность, ортогональная к окружности k и проходящая через точку M, необходимо должна вырождаться в диаметр окружности k, между тем как окружности, ортогональные к окружности k, но не проходящие через точку M, должны оставлять точку M во-вне. Поэтому в нашей модели гиперболические прямые $A'M$ и $B'M$ должны быть представлены эвклидовыми прямыми, а гиперболическая прямая $A'B'$ — дугой окружности, оставляющей точку M во-вне. Эвклидовы углы при точках A' и B' превращаются поэтому в углы треугольника $A'B'M$, ограниченного двумя прямыми и одной дугой окружности, т. е. в углы, меньшие, чем углы треугольника $A'B'M$, образованного прямолинейными отрезками, а потому сумма углов остается меньшей π. Вследствие сохранения углов на модели то же самое имеет место и для суммы гипербо-

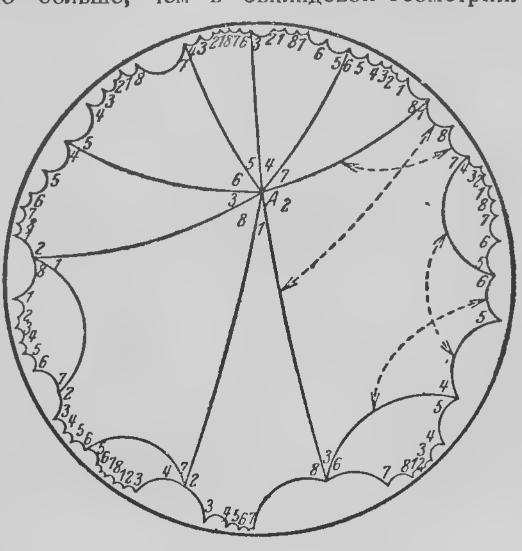


Черт. 248.

[1]) В качестве движений принимаются во внимание здесь также такие отображения, сохраняющие длину на гиперболической плоскости, которые не могут быть воспроизведены непрерывно. Простое движение подобного рода может быть представлено всякой инверсией, входящей в состав группы H: «перевертывание» гиперболической плоскости вокруг прямой. Как показано на стр. 225, всякое гиперболическое движение равносильно самое большее трем перевертываниям.

лических углов гиперболического треугольника $A'B'M$ и конгруэнтного с ним треугольника ABC.

Напрашивается мысль отыскать дискретные группы гиперболических движений. В случае эллиптической геометрии эта задача приводилась к рассмотрению правильных многогранников, и там было немного групп подобного рода. В эвклидовой геометрии установить такие группы было уже труднее. Оказывается, что в гиперболической геометрии число дискретных групп значительно больше, чем в эвклидовой геометрии. Все эти группы осуществляются на модели Пуанкаре группами преобразований, сохраняющих окружности, которые содержатся в группе H как подгруппы.



Черт. 249.

Эти группы играют роль в теории функций. Особенно важны среди них группы сдвигов. Сдвигом называется всякое гиперболическое движение, которое можно получить непрерывно из тождественного преобразования и которое не оставляет неподвижной ни одной точки. В плоской эллиптической геометрии нет аналогий такому движению, так как всякое плоское эллиптическое движение имеет неподвижную точку. В эвклидовой геометрии сдвигам соответствуют переносы. Однако для сложения сдвигов нет таких простых законов, какие существуют для сложения переносов, так как в гиперболической геометрии отпадает однозначность параллельности.

Мы ограничимся дискретными группами сдвигов, обладающими замкнутой фундаментальной областью. Им соответствуют эвклидовы группы переносных движений, имеющие параллелограм в качестве фундаментальной области. В гиперболической группе сдвигов с замкнутой фундаментальной областью эта последняя никогда не представляет собой четырехугольника. Напротив, любое другое число углов, кратное четырем, может встречаться в фундаментальной области. На черт. 249 изображено для случая восьмиугольной фундаментальной области заполнение такими фундаментальными областями гиперболической плоскости на модели Пуанкаре. Все покрытие конечно начертить нельзя, так как восьмиугольники, составленные из дуг окружностей, все ближе прижимаются к граничной окружности. Так же как в основном параллелограме эвклидовых групп переносных движений, и здесь стороны фундаментальной области попарно равны и эквивалентны. На черт. 249 это изображено для одной из фундаментальных областей. Соответствующие углы различных фундаментальных областей обозначены одинаковыми цифрами. На чертеже можно видеть,

что вокруг любой произвольно выбранной вершины A всякая цифра встречается один и только один раз. Отсюда следует, что сумма углов фундаментальной области должна равняться 2π. Во всякой другой группе сдвигов фундаментальные области располагаются аналогичным образом, и потому сумма углов фундаментальной области всегда должна равняться 2π. Далее, стороны в определенном порядке, который мы здесь не описываем подробно, должны быть попарно равны. В остальном фундаментальная область может быть задана произвольно. Из того обстоятельства, что сумма углов должна равняться 2π, понятно, почему не может быть четырехугольных фундаментальных областей. В самом деле, сумма углов гиперболического четырехугольника всегда меньше 2π, как легко видеть путем разложения четырехугольника на два треугольника.

Гораздо обширнее многообразие групп сдвигов с незамкнутой фундаментальной областью. Одна из таких группа применяется в теории эллиптических модуль-функций.

37. Методы отображений. Отображения, сохраняющие длину, сохраняющие площади, геодезические, непрерывные и конформные. Мы уже многократно и различными способами отображали одни поверхности на другие, например при помощи центральной проекции или при помощи параллельных нормалей. Теперь, в заключение, сопоставим важнейшие типы отображений.

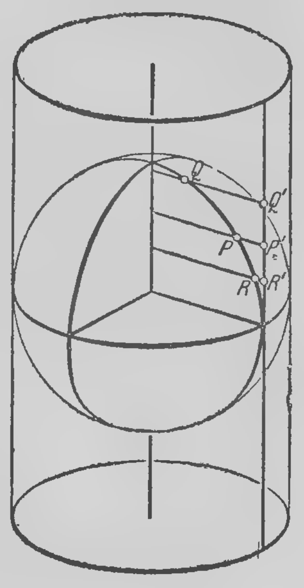
Наиболее точное изображение поверхности дает отображение с сохранением длины. При этом геодезическое расстояние двух точек всегда равно геодезическому расстоянию между образами точек. Все углы сохраняются неизменными, а геодезические линии переходят в геодезические же. Как уже было упомянуто, два произвольных куска двух поверхностей обычно нельзя отобразить друг на друга с сохранением длины. В самом деле, для этого необходимо, чтобы гауссовы кривизны в соответствующих точках поверхностей совпадали. Поэтому на некоторый кусок плоскости можно отобразить с сохранением длины только такие куски поверхностей, гауссова кривизна которых всюду равна нулю; таким образом нельзя, например, отобразить на плоскость кусок шаровой поверхности. Вследствие этого всякая карта земной поверхности неизбежно должна давать искажение.

Менее точно, но все же имеет более широкое применение отображение с сохранением площадей. Оно характеризуется требованием, чтобы площадь всякого куска поверхности, заключенного внутри замкнутой кривой, была равна площади, заключенной внутри изображения этой кривой. Легко представить и нетрудно доказать, что это требование для произвольных замкнутых кривых будет выполнено, если оно выполнено только для всех «бесконечно малых» замкнутых кривых. Поэтому отображение, сохраняющее площади, легко охарактеризовать с точки зрения диференциальной геометрии.

Отображение с сохранением площадей часто используется в географии. Оно дает весьма удобный и простой способ изображения части шаровой поверхности на плоскости. Опишем вокруг шара круговой цилиндр того же радиуса (черт. 250). Будем проектировать точки шара на поверхность цилиндра при помощи нормалей к цилиндру. Если теперь разрезать цилиндр вдоль одной из образующих и развернуть его на плоскость, то, как показывает вычисление, мы получим на пло-

скости изображение шара, сохраняющее площади. Очевидно, изображение будет тем более искажено, чем дальше мы будем отходить от окружности, по которой соприкасаются цилиндр и шар.

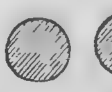
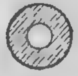
Такое же важное значение в геометрии, а прежде всего для морских карт, имеет геодезическое отображение. При этом отображении требуется, чтобы геодезические линии одной поверхности переходили в геодезические линии другой. Таким образом отображения, сохраняющие длину, представляют частный случай геодезических отображений. Другое отображение подобного рода мы рассматривали при изучении эллиптической геометрии; если проектировать шар из его центра на плоскость, то большие круги шара переходят в прямые на плоскости, и таким образом это отображение есть геодезическое отображение. Вместе с тем оно дает геодезическое отображение всех поверхностей постоянной положительной гауссовой кривизны на плоскость. Оно осуществляется при помощи описанной в § 35 модели гиперболической плоскости.



Черт. 250.

Можно показать, что помимо поверхностей постоянной гауссовой кривизны нет других поверхностей, которые могут быть отображены геодезически на плоскость. Общая задача о том, когда два куска двух кривых поверхностей могут быть геодезически отображены один на другой, приводит к сложным вычислениям. Обобщение этой задачи на пространства трех и более измерений играет известную роль в современной физике; именно, в общей теории относительности траектории материальных точек рассматриваются как геодезические линии четырехмерного континуума.

Наиболее общее отображение, которое вообще доступно наглядному представлению, есть *непрерывное* отображение. При этом отображении требуется только, чтобы оно было взаимно однозначным и чтобы соседние точки оставались соседними. Таким образом непрерывное отображение может произвольно искажать всякую фигуру. Но при этом необходимо, чтобы связные части не разрывались, а раздельные части не обращались в связные. Несмотря на такую большую общность, непрерывное отображение не позволяет переводить два произвольных куска поверхности один в другой. Пример двух кусков поверхностей, которые не могут быть непрерывно отображены один на другой, представляют плоскость круга и плоское круговое кольцо, заключенное между двумя концентрическими окружностями (черт. 251). Даже границы обоих этих кусков поверхностей нельзя непрерывно отобразить одну на другую, так как плоскость круга ограничена одной связной кривой, между тем как граница кольцевой области состоит из двух раздельных кусков.

Черт. 251.

Вопрос о том, когда две поверхности могут быть непрерывно отображены одна на другую, относится к задачам, рассматриваемым в топологии, к которой мы перейдем в последней главе. Очевидно, этот тип отображений охватывает все остальные; геометрическое отображение только в том случае может приводить к полезным следствиям, когда оно непрерывно. Так, по способу, приведенному на черт. 250, мы отображали куски шаровой поверхности на плоскость с сохранением площадей. Полная шаровая поверхность, очевидно, переходит в прямоугольную область. Можно видеть, что отображение теряет наглядное значение на границах прямоугольника, так как оно перестает быть непрерывным. Правда, в современной топологии рассматриваются еще более общие отображения, не являющиеся взаимно однозначными, но такие, которые только в одном направлении однозначны и непрерывны, например отображение куска поверхности на дугу кривой.

Более подробно, чем рассмотренные до сих пор типы отображений, были исследованы отображения, сохраняющие углы, или *конформные*. Они характеризуются требованием, чтобы углы, под которыми пересекаются две кривые, отображались без искажений. Если не считать отображений, сохраняющих длину, то стереографическая проекция и преобразование, сохраняющее окружности, представляют простейшие примеры подобных отображений. Модель Пуанкаре гиперболической геометрии дает отображение поверхностей отрицательной гауссовой кривизны на плоскость с сохранением углов.

Отображение, сохраняющее углы, имеет кое-что общее с отображением, сохраняющим длины. Именно, можно аналитически показать, что весьма малые фигуры при отображении, сохраняющем углы, изображаются почти без искажений; это значит, что помимо углов остаются приблизительно неизменными, правда, не длины, но отношения длин, причем эти отношения сохраняются с тем большей точностью, чем меньше рассматриваемая фигура. Название «конформное» как раз и указывает на это свойство. Поэтому конформное отображение в малом из всех вышеописанных типов отображений ближе всего подходит к отображению, сохраняющему длины. В самом деле, из наших примеров видно, что при отображении, сохраняющем площади, и при геодезическом отображении даже произвольно малые фигуры могут быть искажены сколь угодно сильно.

В то время как отображение, сохраняющее длины, применимо лишь в очень ограниченной мере, конформное отображение имеет широкие применения, и как раз вопрос о применимости конформного отображения поставил его в центр плодотворных геометрических исследований. Простейший вопрос этого рода, именно вопрос о том, когда два *плоских* куска поверхности могут быть конформно отображены один на другой, приводит к наглядному представлению комплексных чисел и рассматривается в *геометрической теории функций*.

38. Геометрическая теория функций. Теорема Римана об отображениях. Конформное отображение в пространстве. Возьмем декартову систему координат на плоскости и отнесем произвольной точке P, имеющей координаты x, y, комплексное число $z = x + yi$. Таким способом мы установим однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Представляется целесообразным обобщить это соответствие, до-

полнив плоскость, так же как в учении о преобразованиях, сохраняющих окружности, бесконечно удаленной точкой P_∞, которой мы присвоим число ∞. Подобное наглядное представление комплексных чисел называется *числовой плоскостью*. Отображение одного куска плоскости на другой при этом приводится к соответствию между комплексными числами. Простейшим примером может служить соотношение $w = az + b$, где a, b — произвольные комплексные постоянные, причем $a \neq 0$. В качестве образа точки, которой соответствует комплексное число z, мы рассматриваем точку, которой соответствует число $w = az + b$.

Получающееся таким образом отображение плоскости на самое себя представляет просто преобразование подобия; обратно, можно получить все преобразования подобия плоскости, возникающие непрерывно из тождественного преобразования, если заставить числа a и b пробегать все комплексные значения, кроме $a = 0$.

Преобразования подобия, соединенные с перевертыванием плоскости, которые невозможно получить непрерывно в самой плоскости, соответствуют уравнению:

$$w = a\bar{z} + b,$$

где $\bar{z}$ означает комплексное число $z = x - yi$, сопряженное с числом $z = x + yi$. Эти теоремы можно доказать элементарным путем. Преобразования, сохраняющие окружности и не оставляющие неподвижной точки P_∞, соответствуют дробнолинейным преобразованиям:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0), \tag{1}$$

если рассматривать только те преобразования, сохраняющие окружности, которые можно получить непрерывно из тождественного преобразования на плоскости. Остальные преобразования можно получить, заменяя в (1) z на $\bar{z}$. Инверсия относительно окружности k радиуса единица, проведенной вокруг начала, будет, например, представлена формулой:

$$w = \frac{1}{\bar{z}}.$$

В самом деле, имеем:

$$w = u + vi = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - yi} = \frac{x + yi}{x^2 + y^2},$$

т. е.

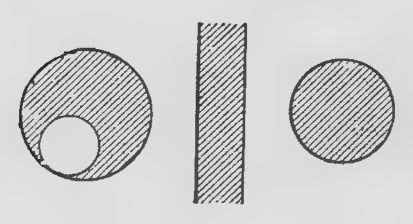
$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Пусть M, P, Q — точки с координатами $(0, 0)$, (x, y), (u, v), т. е. P, Q — точки, соответствующие числам z, w; тогда из (2) следует, что точки P и Q расположены на одном и том же луче, выходящем из точки M, и что для расстояний MP и MQ имеет место соотношение $MP \cdot MQ = 1$. Таким образом точки P и Q составляют инверсию по отношению к кругу k.

Если исходить из более общего соотношения $w=f(z)$, где $f(z)$ представляет некоторую дробную рациональную функцию от z, то эта функция также всегда дает *конформное* отображение плоскости. При этом нужно только ограничиться такими областями плоскости, которые не содержат особых точек, определяемых этой функцией.

Всякая функция $f(z)$ такого рода, что $w=f(z)$ определяет конформное отображение на числовой плоскости, называется *аналитической функцией* [1]). Не только рациональные, но и почти все встречающиеся в практике функции являются аналитическими функциями. С аналитическими функциями можно производить вычисления в значительной мере так же, как с действительными функциями от действительных переменных. Тем самым двумерная задача конформного отображения приводится к рассмотренному одномерному типу.

Подобные исследования в теории функций комплексного переменного позволяют прежде всего доказать важную теорему о том, что преобразования, сохраняющие окружности и, соответственно, целые и дробные линейные функции, дают все конформные отображения, переводящие внутренность одного круга во внутренность или внешность другого (или того же самого круга). Вследствие этого гиперболические движения в модели Пуанкаре представляют все конформные отображения круга на самого себя. Таким образом, если известно относительно некоторого конформного отображения, в какую область оно переводит круг, то это отображение определяется этими данными с точностью до гиперболического движения. В соответствии с этим мы можем охарактеризовать аналитические функции с точностью до несущественного преобразования той областью, в которую они переводят круг. Области, которые получаются одна из другой при помощи преобразования, сохраняющего окружности, мы при этом не будем рассматривать как существенно различные. Так, например, мы можем исходить от полуплоскости, вместо того чтобы исходить от круга. Так, функция $\sqrt{z}$ переводит полуплоскость в квадрант, а функция $\ln z$ превращает полуплоскость в полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми. Поэтому линейные преобразования позволяют легко установить конформное отображение, которое переводит круг, изображенный на черт. 252, в один из двух других, изображенных на этом чертеже кусков плоскости.



Черт. 252.

Во всех этих примерах, которые будут описаны ниже, отображение конформно во всех внутренних точках кусков поверхностей, на границе же оно конформно лишь постольку, поскольку границы не имеют изломов. Если гладкая дуга граничной кривой переходит в ломаную, то,

[1]) Это наглядное определение эквивалентно тому, что $f(z)$ диференцируема, т. е. что отношение $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ во всякой точке z_0 области стремится к некоторому комплексному числу $f'(z_0)$, если z в этой области стремится к z_0. Существенно при этом, чтобы число $f'(z_0)$ не зависело от пути, по которому z стремится к z_0 в числовой плоскости.

естественно, в этом месте отображение не может быть конформным. Оказывается, что в таких точках отображение всегда сохраняет пропорциональность углов, т. е. все углы изменяются так, что коэфициент пропорциональности остается одним и тем же. Так, при отображении, определяемом функцией $\sqrt{z}$, прямая, ограничивающая рассматриваемую полуплоскость, переходит в стороны прямого угла. В точке, которая переходит в вершину угла, все углы уменьшаются вдвое.

Риман установил важную теорему, что всякая плоская область, не охватывающая всей эвклидовой плоскости, и притом такая, которая может быть взаимно однозначно и непрерывно отображена на круг, может быть отображена на него также конформно. Эта теорема дает представление о многообразии аналитических функций.

Риманова теорема не была строго доказана самим Риманом, а была установлена им только как эквивалентная одной задаче вариационного исчисления, так называемой задаче Дирихле, относительно которой Риман считал очевидным, что она имеет решение. Разрешимость задачи Дирихле была строго доказана лишь значительно позже. Между прочим, удалось также доказать риманову теорему следующим простым путем.

Для того чтобы отобразить конформно на круг K произвольную область G, допускающую деформацию ее в круг, будем исходить от некоторого конформного отображения a_0, которое отображает конформно область G на частичную облась K_0 области K. Можно, например, в качестве отображения a_0 выбрать преобразование подобия. Потребуем еще, чтобы при преобразовании a_0 некоторая наперед заданная внутренняя точка P области G переходила в центр круга M. Пусть теперь R_0 представляет образ другой внутренней точки Q области G. Тогда можно доказать следующее Преобразование a_0 может быть превращено в другое конформное преобразование a_1 так, что область G будет переходить при преобразовании a_1 в частичную область K_1 области K, и, далее, точка P опять перейдет в точку M и так, что *точка Q перейдет в некоторую точку R_1, лежащую на радиусе MR_0, расположенную на большем расстоянии от M, чем точка R_0*. Кроме того переход от отображения a_0 к a_1 дается конформным отображением, соответствующим корню квадратному из некоторой дробнолинейной функции. Таким же способом можно далее изменить преобразование a_1, так что мы получим последовательность конформных отображений a_n области G на частичные области K_n области K, причем при всех этих отображениях точка P будет переходить в точку M, а точка Q — в последовательность точек R_n, расположенных на радиусе MR_0 и все более удаленных от точки M. Оказывается, что области K_n все более заполняют круг K и что последовательность отображений a_n сходится к конформному отображению a. Это отображение a преобразует конформно область G в круг K, как того и требует теорема Римана.

Описанный здесь способ, данный Кёбе (Koebe), показывает, что искомое отображение обладает некоторым экстремальным свойством. Именно, очевидно, что точка R области K, в которую переводится точка Q отображением a, есть та точка на радиусе MR_0, к которой сходятся точки R_n. Отсюда следует, что для всякого n имеем $MR > MR_n$. То же самое неравенство сохраняется, если измерять расстояние не эвклидовым

способом, а гиперболическим, рассматривая внутренность круга K как модель Пуанкаре гиперболической плоскости. В самом деле, гиперболическое расстояние некоторой точки от центра круга M измеряется, так же как эвклидово, вдоль радиуса, так как радиусы представляют гиперболические прямые, проходящие через точку M (стр. 225). Кроме отображения a существуют и другие конформные отображения b области G на круг K. Однако согласно приведенной выше теореме отображения b могут отличаться от отображения a только на гиперболическое движение круга K. Поэтому, если S, T суть изображения точек P, Q при отображении b, то гиперболические расстояния MR и ST должны быть непременно равны. Таким образом мы нашли искомое экстремальное свойство: *при всяком конформном отображении области G на круг K образы произвольной пары внутренних точек области G отстоят на большем гиперболическом расстоянии в круге K, чем при всяком конформном отображении области G на частичную область круга K.*

В смысле гиперболической геометрии мы можем описать наш способ таким образом. Если область G конформно отображена на область гиперболической плоскости K' и если пытаться непрерывно изменять это отображение так, что оно остается конформным, но при этом любые две выбранные точки все более удаляются одна от другой, то область K' постепенно заполняет всю гиперболическую плоскость. Расстояние между обеими точками возрастает до определенного *конечного* максимума, который достигается тогда и только тогда, когда область K' заполняет всю гиперболическую плоскость.

Напрашивается мысль попробовать конформно отобразить внутренность области G вместо гиперболической на эвклидову плоскость. *Непрерывное* отображение конечно возможно, так как внутренность области G по предположению может быть непрерывно отображена на внутренность круга, а внутренность круга, очевидно, непрерывно отображается на эвклидову плоскость (так, например, мы можем непрерывно отобразить при помощи стереографической проекции внутренность круга H на полушарие, а полушарие при помощи центральной проекции из центра шара непрерывно отобразить на эвклидову плоскость E). *Конформное* отображение области H на плоскость E, однако, невозможно. В самом деле, при таком отображении всякому конформному отображению области H на самое себя должно было бы соответствовать конформное отображение плоскости E на самое себя. Совокупность конформных отображений области H на себя представляет семейство гиперболических движений с тремя параметрами. Поэтому, если бы существовало конформное отображение $H \rightarrow E$, то и совокупность конформных отображений плоскости E на себя должна была бы представлять семейство с тремя параметрами. Однако такие отображения во всяком случае представляют преобразования подобия, а преобразования подобия образуют семейство с четырьмя параметрами. В самом деле, если представить их в виде $w = az + b$, то они определяются двумя комплексными числами a и b, т. е. четырьмя действительными числами. Отсюда следует, что невозможно конформное отображение области H на плоскость E. Впрочем, преобразования подобия исчерпывают совокупность конформных отображений плоскости на себя.

В пространстве можно определить конформное отображение точно так же, как на плоскости. Однако в пространстве совокупность всех конформных отображений весьма ограничена. Именно, все эти отображения суть преобразования, сохраняющие сферы, т. е. они переводят совокупность сфер и плоскостей в себя. Совокупность всех преобразований, сохраняющих сферы, образует семейство с десятью параметрами. Особенно простое преобразование, сохраняющее сферы, представляет инверсия в пространстве. Она определяется аналогично инверсии на плоскости; если заданы постоянная точка M и постоянное положительное число r, то всякой точке P, отличной от точки M, соответствует в качестве образа та точка Q, которая лежит на полупрямой MP, выходящей из точки M, и для которой выполняется равенство $MP \cdot MQ = r^2$. Всякое преобразование, сохраняющее сферы, можно составить из инверсии в пространстве и преобразования подобия.

39. Конформное отображение кривых поверхностей. Минимальные поверхности. Задача Плато. Примером конформного отображения кривой поверхности на плоскость служит стереографическая проекция. Она переводит всякое конформное отображение на плоскости в конформное отображение на шаре. Конформным отображениям на шаре, оставляющим неизменной точку N, при стереографической проекции из точки N соответствуют конформные отображения эвклидовой плоскости на себя. Как мы уже упоминали, это суть преобразования подобия и только они. Отсюда следует, что все конформные отображения шаровой поверхности на себя, оставляющие некоторую точку неизменной, суть преобразования, сохраняющие окружности. Всякое конформное отображение шаровой поверхности на себя можно перевести вращением шара вокруг его диаметра в отображение, оставляющее неподвижной одну точку. Поэтому совокупность всех конформных преобразований шара на себя должна быть тождественна с совокупностью преобразований, сохраняющих окружности на шаре, т. е. с преобразованиями, которые при стереографическом проектировании соответствуют преобразованиям, сохраняющим окружности на плоскости. Преобразования, сохраняющие окружности на плоскости, выражаются формулой (1) на стр. 231. В нее входят четыре комплексные постоянные, которые определены, однако, с точностью до некоторого общего комплексного множителя. Поэтому преобразования, сохраняющие окружности на плоскости, а также на шаре, образуют семейство с шестью параметрами.

Оказывается, можно доказать, что произвольная замкнутая поверхность, которая может быть непрерывно отображена на шар, как, например, эллипсоид, может быть также конформно отображена на шар. Отсюда следует, что всякие две таких поверхности всегда могут быть также конформно отображены одна на другую и что всякая подобная поверхность обладает семейством конформных отображений на себя ровно с шестью параметрами.

Поверхности, которые могут быть отображены непрерывно на внутренность круга или на эвклидову плоскость, как, например, гиперболический параболоид, заведомо не могут быть все конформно отображены одна на другую, так как, например, внутренность круга не может быть конформно отображена на эвклидову плоскость. Существует, однако, важная теорема

о «дизъюнкции»; всякая подобная поверхность может быть конформно отображена либо на внутренность круга, либо на эвклидову плоскость.

Для других типов поверхностей, например для поверхности тора, вопрос о возможности конформного отображения также получает исчерпывающий ответ. Так как при этом необходимы вспомогательные топологические средства, то мы вернемся к этому только в главе о топологии.

Особенно интересный пример конформного отображения представляют минимальные поверхности. Выше мы охарактеризовали эти поверхности (стр. 169) тем, что в каждой их точке обе главные кривизны равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки. Из этого определения легко вывести, что для минимальных поверхностей сферическое изображение конформно, и обратно, можно показать, что помимо шаров минимальные поверхности суть единственные поверхности, для которых сферическое изображение конформно. Благодаря этому минимальные поверхности тесно связаны с теорией функций. Всякую аналитическую функцию комплексной переменной можно использовать для определения минимальной поверхности.

Если натянуть на замкнутую проволочную фигуру мыльную пленку, то, как было указано, она принимает форму минимальной поверхности. Так возникает поставленная впервые Плато (Plateau) задача: для всякой заданной замкнутой пространственной кривой найти кусок минимальной поверхности, ограниченный этой кривой. Долгое время напрасно старались доказать хотя бы существование подобной минимальной поверхности для всякой заданной границы. Только в самое последнее время Дуглас (Douglas)[1]) дал решение задачи Плато в общем виде.

Дуглас заменяет эту задачу еще более общей; он ищет не только минимальную поверхность M, заключенную внутри заданной пространственной кривой r, но также и конформное отображение этой поверхности на круг K. С этой целью он рассматривает прежде всего отображение, переводящее кривую r в окружность k круга K. Оказывается, что это отображение характеризуется одним экстремальным свойством. Всякой хорде s кривой r при отображении ее концевых точек соответствует хорда s' окружности k. Если принять отношение $\frac{s'}{s}$ за длину хорды s и образовать из обратных величин квадратов этих длин по всем хордам кривой r среднее, то при искомом отображении это среднее значение будет наименьшим [2]). Таким образом можно сказать, что искомое отображение отдаляет в среднем все точки кривой r на наибольшее возможное расстояние друг от друга. Можно доказать, что отображение,

---

[1]) Trans. Amer. math. Soc., т. 33 (1931). При несколько более узких допущениях незадолго перед тем задача Плато была разрешена Радо (T. Radó, Math. Z., т. 32, 1930).

[2]) Формулы дают следующее: пусть P и Q — две точки кривой r, которые переходят в точки P' и Q' окружности k, α и β — аргументы точек P' и Q'; положим $\frac{PQ}{P'Q'} = v(\alpha, \beta)$; тогда двойной интеграл

$$\int\limits_{\alpha=0}^{2\pi} \int\limits_{\beta=0}^{2\pi} [v(\alpha, \beta)]^2 \, d\alpha \, d\beta$$

для искомого отображения имеет наименьшее значение.

обладающее таким экстремальным свойством, всегда существует. При помощи этого отображения $r \to k$ можно представить известными аналитическими формулами [1]) декартовы координаты остальных точек минимальной поверхности M как функции точек круга K.

Если предположить, что кривая r плоская, то поверхность M вырождается в плоскую область G, ограниченную кривой r. Способ Дугласа дает тогда конформное отображение области G на круг K, т. е. решение римановой задачи. Это решение, очевидно, получается путем, обратным тому, который был использован ранее. Прежний способ построения исходил от пары внутренних точек области; увеличивая гиперболическое расстояние изображений этих точек, мы достигали того, что граница области G приводилась к совпадению с границей области K. Способ Дугласа, обратно, сначала осуществляет отображение границы области G на границу области K, характеризующееся определенным экстремальным свойством. Тогда отображение внутренних точек получается само собой.

Для пространственных кривых r частного вида можно определить соответствующие минимальные поверхности значительно более простым путем; это возможно, например, если в качестве кривой r выбран замкнутый пространственный многоугольник, составленный из прямолинейных отрезков. Вообще минимальные поверхности, ограниченные кривой r, имеют особенности на этой границе; однако специальным выбором кривой r можно достичь того, чтобы минимальные поверхности позволяли правильное продолжение за граничную кривую. Таким способом Неовиусу (Neovius) [2]) удалось построить минимальную поверхность, которая может быть продолжена во всем пространстве без особенностей, которая не пересекает сама себя и обладает такой же симметрией, как решетка алмаза.

Сферическое изображение этой поверхности также не может иметь границы. Можно наконец показать, что на минимальных поверхностях нельзя провести параболических кривых, по которым сферическое изображение могло бы быть перевернуто. В то же время сферическое изображение поверхности Неовиуса не может гладко, без складок и ветвлений, покрыть всю поверхность шара, так как в противном случае эту поверхность можно было бы непрерывно отобразить на шар. Противоречие разрешается тем, что на поверхности Неовиуса имеются обезьяньи седла. В таких местах однократный обход на поверхности преобразуется в многократный обход на сферическом изображении ее (стр. 180). Сферическое изображение минимальной поверхности Неовиуса поэтому покрывает шар в виде бесконечного множества листов, связанных друг с другом в изображениях обезьяньих седел. Сферическое изображение многих других минимальных поверхностей обнаруживает аналогичное поведение. Исследуя общее поведение конформных отображений, представляемых нелинейными функциями, например функцией $w = z^2$, Риман пришел к поверхностям, представляющим расширенные поверхности шара или плоскости. Места, в которых полосы римановой поверхности связываются друг с другом и одна с другой аналогично сферическому изображению обезьяньего седла, были названы Риманом точками ветвления.

---

1) Интеграл Пуассона по кривой r.

2) E. R. Neovius, Bestimmung zweier speziellen periodischen Minimalfächen. Akad. Abhandlung, Helsingfors 1883.

ПЯТАЯ ГЛАВА

КИНЕМАТИКА

До сих пор мы рассматривали главным образом неподвижные в пространстве фигуры, так как геометрия кладет в основу именно такие фигуры. Но уже в элементарной геометрии понятие движения играет известную роль. Так, мы называли две фигуры конгруэнтными, если посредством движения их можно совместить. Далее мы рассматривали подвижные гиперболоиды (стр. 22), определяли линейчатые поверхности при посредстве движущейся плоскости (стр. 182), изгибали и деформировали поверхности (четвертая глава). В кинематике движения рассматриваются систематически.

Прежде всего мы рассмотрим ту часть кинематики, которая тесно связана с элементарной метрикой: учение о шарнирных механизмах. Затем мы исследуем непрерывные движения с более общей точки зрения; при этом мы будем пользоваться диференциально-геометрическими методами.

40. Шарнирные механизмы. Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости. Простейшим таким механизмом является единственный жесткий стержень, закрепленный одним концом в некоторой точке плоскости, вокруг которой он может вращаться, т. е. циркуль.

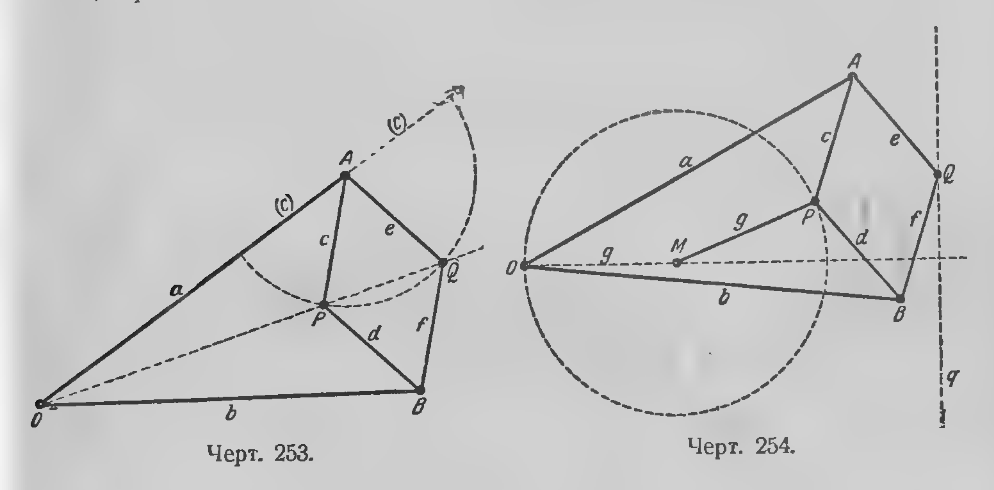
Подобно тому как свободный конец циркуля описывает окружность, так во всех других плоских шарнирных механизмах все точки стержней движутся по алгебраическим кривым, т. е. по таким кривым, координаты которых в декартовой системе связаны алгебраическим уравнением. Обратно, для всякой сколь угодно сложной алгебраической кривой можно подобрать такое шарнирное сочленение, с помощью которого данная кривая может быть построена (хотя бы по кускам).

Создание такой конструкции для простейшей алгебраической кривой, именно для прямой линии, представляет известную задачу о прямолинейно направляющем механизме. Модель такого механизма, инверсор Поселье (Peaucellier), мы рассмотрим здесь подробно. Будем исходить от изображенного на черт. 253 механизма, состоящего из шести стержней. Из этих стержней a и b равны между собой; точно так же стержни c, d, e, f равны между собой. Стержни a и b закреплены в неподвижной точке O, вокруг которой они могут вращаться. Во всяком положении механизма

точки P и Q должны лежать на одной прямой с точкой O, именно на биссектрисе угла AOB. Построив окружность радиуса c вокруг точки A, получаем далее на основании теоремы о хордах, что при всяком положении механизма удовлетворяется соотношение:

$$OP \cdot OQ = (OA + c)(OA - c) = a^2 - c^2.$$

Соответственно с этим точки P и Q представляют инверсию относительно окружности с центром O и радиуса $\sqrt{a^2 - c^2}$ (стр. 223). Очевидно, точку P можно привести в любую точку кругового кольца, ограниченного концентрическими окружностями с радиусами $a + c$ и $a - c$ и центром в точке O. Таким образом наш аппарат позволяет для любой



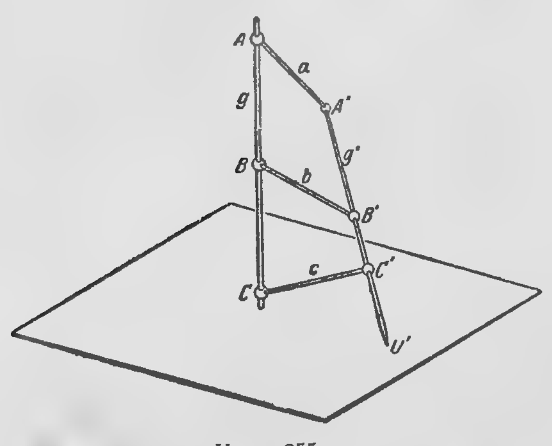
Черт. 253. Черт. 254.

точки этой области найти инверсную точку относительно указанного круга, почему этот механизм и называется инверсором. Если точка P описывает окружность, проходящую через точку O, то точка Q должна описывать прямую (стр. 223). Поэтому мы можем закрепить в точке P еще один стержень g (черт. 254), другой конец которого мы закрепим в точке M, находящейся на расстоянии g от точки O. Тогда точка P вынуждена оставаться на окружности радиуса g с центром в точке M. Из равенства $OM = g$ следует, что эта окружность проходит через точку O. Поэтому точка Q описывает прямую q, и тем самым наша задача решена. Как легко видеть, прямая q перпендикулярна к OM; таким образом прямолинейно направляющий механизм Поселье позволяет опустить перпендикуляр на заданную прямую.

В пространстве шарнирные механизмы определяются аналогичным образом. Однако в этом случае шарниры, соединяющие стержни между собой или прикрепляющие их к неподвижным точкам, должны допускать вращения не только в одной плоскости, но и вращения во всевозможных направлениях в пространстве. В определенных случаях практически этого можно достичь при помощи шаровых сочленений. Концы стержней пространственного шарнирного механизма всегда описывают алгебраические поверхности. Однако до сих пор не доказано обратного положения, именно,

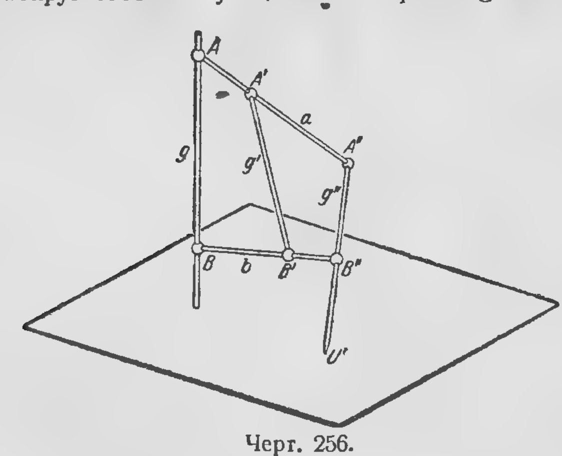
что всякая алгебраическая поверхность может быть построена при помощи шарнирного механизма, хотя такая теорема весьма вероятна.

Рассмотрим опять-таки простейшую из таких конструкций, а именно плоско направляющий механизм. Для этой цели будем исходить из подвижной стержневой модели однополостного гиперболоида (стр. 21). Пусть g и g' — две прямые одного семейства, h — подвижная прямая другого семейства, пересекающая прямые g и g' в переменных точках H и H'. Пусть теперь модель, составленная из стержней, движется так, что стержень g остается неподвижным (черт. 255); тогда всякая точка H' пр мой g' сохраняет постоянное расстояние от соответствующей точки H прямой g.



Черт. 255.

Таким образом точки прямой g' описывают при движении модели шары вокруг соответствующих точек прямой g. Если теперь выбрать положение прямой h так, чтобы она пересекала прямую g в бесконечно удаленной ее точке U, и если U' есть точка пересечения прямой h с g', т. е. точка, соответствующая бесконечно удаленной точке U, то эта точка U' должна быть расположена на конечном расстоянии, ибо в противном случае $UU' = h$ была бы бесконечно удаленной прямой поверхности, и, следовательно, поверхность представляла бы не гиперболоид, а гиперболический параболоид (стр. 21). Поэтому при движении модели точка U' описывает шар бесконечно большого радиуса, т. е. плоскость.



Черт. 256.

Из нашего рассмотрения вытекает простое построение плоско направляющего механизма. Тремя стержнями одного семейства гиперболоид полностью определяется. Поэтому мы можем прикрепить к неподвижному стержню g тремя шаровыми шарнирами A, B, C три других стержня a, b, c. Другие концы этих стержней прикрепим шаровыми шарнирами к трем точкам A', B', C' другого стержня g'. Для того чтобы стержни a, b, c

описывали гиперболоид, а не гиперболический параболоид, достаточно выбрать точки так, чтобы удовлетворялось соотношение: $AB:AC \neq A'B':A'C'$. Именно, можно показать, что на гиперболическом параболоиде расстояние трех точек прямой g всегда относится так, как расстояния соответствующих точек прямой g'. В нашем механизме всякая точка прямой g' имеет две степени свободы, так как подвижный гиперболоид, определяемый стержнями a, b, c, может принимать ∞^1 форм, а каждая из этих поверхностей может еще обладать произвольным вращением вокруг прямой g как оси [1]). Согласно вышесказанному точки прямой g' описывают шары, имеющие прямую g в качестве диаметра, а точка U' прямой g' описывает часть плоскости, перпендикулярной к прямой g'. Можно усмотреть, что точка U' пробегает все точки плоского кругового кольца, описанного вокруг прямой g как оси. Таким образом наша задача решена. Другое возможное решение изображено на черт. 256. Этот механизм можно получить из предыдущего, если поменять роли обоих семейств прямых линий подвижного гиперболоида.

41. Движение плоских фигур. Пусть некоторая подвижная плоскость скользит произвольным образом по неподвижной плоскости. Опишем такое движение геометрически возможно более простым образом.

Как мы уже прежде подробно выяснили, всякое движение плоскости по самой себе из начального в конечное положение тождественно с одним единственным поворотом или единственным переносом (стр. 61). Если рассматривать перенос как вращение вокруг бесконечно удаленной точки, то можно сказать, что всякое плоское перемещение может быть заменено вращением вокруг определенного центра.

Пусть теперь задано определенное движение. Тогда подвижная плоскость в некоторый момент t занимает определенное положение A. Сравним с этим положением другое положение A_h, которое подвижная плоскость занимает в некоторый близкий последующий момент $t+h$. Этому изменению положения $A \longrightarrow A_h$ соответствует определенный центр вращения M_h. Если задавать h все меньшие значения, т. е. если положение A_h будет все меньше отличаться от положения A, то центр вращения M_h будет стремиться к некоторому предельному положению M. Точка M называется мгновенным центром вращения для момента t. Направление движения всякой другой точки P подвижной плоскости в этот момент перпендикулярно к PM.

Если мы определим мгновенные центры для всех моментов движения, то получим в неподвижной плоскости геометрическое место мгновенных центров, представляющее некоторую кривую, называемую полодией. Но мы можем для того же самого движения рассматривать движущуюся плоскость как неподвижную, а плоскость, остававшуюся неподвижной, как

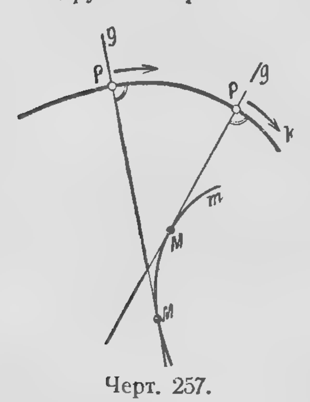
---

[1]) Степени свободы можно подсчитать также следующим образом: если бы не было стержня g', то тройка точек A', B', C' имела бы шесть степеней свободы, так как каждая в отдельности из них может двигаться по поверхности шара и, следовательно, имеет две степени свободы. Требование, чтобы точка C' лежала на одной прямой с точками A', B', дает два условия, а требование, чтобы прямые $A'B'$ и $A'C'$ имели постоянную длину, дает еще одно условие. Таким образом мы получаем $6-2-1-1=2$ степени свободы в соответствии с изложенными в § 24 методами.

движущуюся. В таком виде это движение будет представляться наблюдателю, двигавшемуся вместе с плоскостью, принятой первоначально за подвижную. Таким образом и в этой плоскости точно так же получается определенная кривая как геометрическое место мгновенных центров. Она называется подвижной полодией. Обе кривые всюду непрерывны; они могут также простираться в бесконечность, но должны быть там замкнуты в смысле проективной геометрии, т. е. при центральном проектировании на любую другую плоскость они должны переходить в кривые, непрерывные в соответствующих местах горизонта.

Подробное исследование показывает, что вид подвижной и неподвижной полодий полностью определяет движение, если при этом заданы две точки обеих кривых, совпадающие в некоторый момент движения. Именно, мы восстановим движение, если так наложим обе кривые друг на друга, что они будут соприкасаться в заданных точках, и затем заставим подвижную полодию катиться без скольжения по неподвижной, увлекая вместе с собой свою плоскость. При этом обе кривые будут всегда соприкасаться друг с другом во всех мгновенных центрах движения. Так как кривые катятся одна по другой без скольжения, то отсюда следует, что две точки неподвижной полодии и две соответствующие точки подвижной полодии всегда ограничивают дуги равной длины на обеих кривых.

Таким образом мы получили для непрерывных движений характеристику, подобную той, которую мы прежде имели для дискретных движений; всякое непрерывное движение получается при качении одной кривой по другой. При этом следует еще допустить, что обе кривые могут вырождаться в точки (вращение). В качестве примера рассмотрим на неподвижной плоскости произвольную кривую k, а на подвижной плоскости — прямую g и потребуем, чтобы при движении некоторая точка P прямой g описывала кривую k и чтобы при этом прямая g все время оставалась перпендикулярной к кривой k (черт. 257). Из определения центра кривизны непосредственно следует, что мгновенный центр M всегда должен быть центром кривизны кривой k в соответствующей точке P. Таким образом неподвижная полодия есть эволюта m кривой k, а подвижная полодия в подвижной плоскости есть сама прямая g, так как точка M всегда лежит на этой прямой. Таким образом движение получается при качении прямой g по кривой m. При этом точка P прямой g описывает кривую k, для которой кривая m служит эволютой. Расстояние двух точек на прямой g всегда равно длине дуги между соответствующими точками кривой m. Отсюда вытекает уже рассмотренное выше построение всякой кривой из ее эволюты при помощи нити (стр. 161).

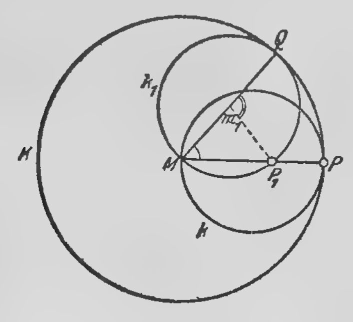


Черт. 257.

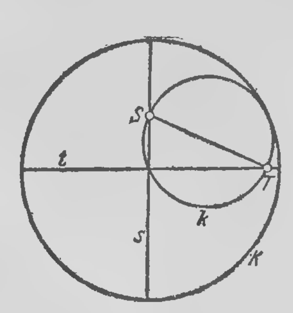
Особенно важны кривые, описываемые точками подвижной плоскости в случае, когда неподвижная и подвижная полодии представляют окружности. Эти кривые имеют различный вид в зависимости от того, касается ли подвижный круг неподвижного изнутри или извне. В первом случае

кривые называются гипотрохоидами, во втором — эпитрохоидами. Если точка, описывающая кривую, лежит на самой окружности подвижного круга, то кривая называется гипоциклоидой или эпициклоидой. Далее, вид трохоид и циклоид зависит от отношения радиуса неподвижного круга к радиусу подвижного.

Предположим сначала, что радиус подвижного круга k в два раза меньше радиуса неподвижного круга K и что подвижный круг касается неподвижного изнутри. Определим для этого случая траекторию точки P окружности k, т. е. гипоциклоиду [1]). Начнем с момента, когда круг k касается неподвижного круга K как раз в точке P (черт. 258). Рассмотрим далее другое положение k_1 подвижного круга. Пусть при этом точка P перешла в точку P_1 и пусть M и m_1 — центры кругов K и k_1,



Черт 258.



Черт. 259.

а Q — их точка касания. Так как круги катятся один по другому без скольжения, то дуга QP_1 круга k_1 равна дуге QP окружности K. Так как далее радиус круга k в два раза меньше радиуса круга K, то отсюда имеем:

$$\sphericalangle Qm_1P_1 = 2 \sphericalangle QMP.$$

На том же основании точка M должна лежать на окружности круга k_1, а потому по известной теореме относительно вписанных и центральных углов имеем:

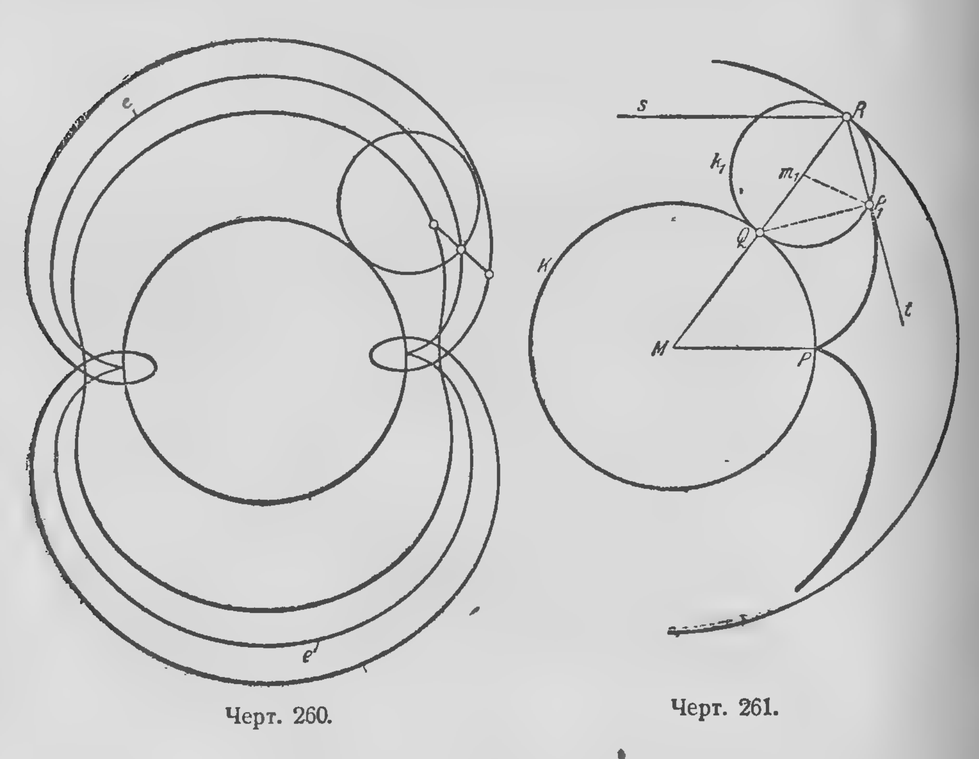
$$\sphericalangle QMP_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle Qm_1P_1 = \sphericalangle QMP.$$

Поэтому прямая MP_1 совпадает с прямой MP, т. е. точка P_1 при движении описывает прямую MP. Таким образом мы доказали поразительный факт, а именно, что в нашем случае гипоциклоиды суть диаметры неподвижного круга. Вместе с тем отсюда вытекает новый метод построения прямолинейно направляющего механизма.

Для того, чтобы определить также и соответствующие гипотрохоиды, опишем движение несколько иным способом, воспользовавшись

[1]) Безразлично, какую бы точку окружности мы ни выбрали. В самом деле, вследствие симметрии этой фигуры, циклоиды, образуемые различными точками окружности k, отличаются только углом поворота окружности k вокруг центра окружности K.

полученными только что результатами. Именно, пусть S и T — две произвольные диаметрально противоположные точки окружности круга k; тогда дуге окружности ST соответствует при качении четверть окружности K. Точки S и T двигаются поэтому по двум взаимно перпендикулярным диаметрам s и t круга K (черт. 259). Теперь легко простыми выкладками выяснить, что когда некоторый отрезок ST движется таким образом, что его концы описывают две взаимно перпендикулярные прямые, то середина отрезка описывает окружность, а всякая другая точка P отрезка описывает эллипс, оси которого совпадают с прямыми s и t. Длина полуосей равна двум отрезкам, на которые разбивается отрезок ST



Черт. 260. Черт. 261.

точкой P. Отсюда следует, что гипотрохоиды в нашем случае представляют всегда эллипсы. В самом деле, всякая точка, неподвижно соединенная с кругом k, лежит на одном из диаметров этого круга, т. е. на одной из прямых, две точки которой скользят вдоль перпендикулярных прямых.

Рассмотрим теперь случай, когда круг k катится извне по кругу K. В этом случае эти циклоиды имеют вид кривой e черт. 260. Можно доказать, что как у этой кривой, так и у всех других эпициклоид и гипоциклоид всегда имеются острия. В таких точках циклоиды перпендикулярны к неподвижному кругу. Острия соответствуют таким положениям круга, в которых точка, образующая циклоиду, является точкой прикосновения окружностей. Так как в нашем случае

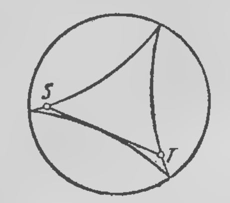
радиус круга k вдвое меньше радиуса круга K, то должно получаться как раз два острия.

Касательная к нашей кривой обладает замечательным свойством. Оно может быть уяснено из черт. 261. Пусть качение начинается в момент, когда точка P, образующая кривую, совпадает с точкой касания кругов, то есть когда эта точка образует одно острие циклоиды. На чертеже изображено и другое положение k_1 круга k. Точка P прошла по дуге циклоиды в положение P_1. Соединим центры M и m_1 кругов K и k_1. Прямая Mm_1 проходит через точку касания Q окружностей K и k_1 и пересекает окружность k_1 вторично в точке R. Пусть t — касательная к циклоиде в точке P_1. Так как Q есть мгновенный центр движения в рассматриваемом положении круга k, то направление движения точки P_1, а значит, и прямая t перпендикулярны к QP_1. Поэтому прямая t совпадает с прямой P_1R, так как угол QP_1R как вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой. Подобным же свойством обладают касательные ко всем эпи- и гипоциклоидам. Из равенства дуг PQ круга K и P_1Q круга k_1 в нашем случае, когда радиус круга k вдвое меньше радиуса круга K, следует:

$$\angle PMQ = \frac{1}{2} \angle P_1m_1Q = \angle P_1RQ.$$

Если мы проведем через точку R прямую s, параллельную прямой MP, то прямые s и t образуют равные углы с прямой MR. Это можно формулировать как теорему геометрической оптики, именно: если пучок параллельных лучей (s) отражается от окружности радиуса MR с центром M, то отраженные лучи (t) огибают эпициклоиду с двумя остриями, образующий круг которой имеет центр M и радиус $\frac{1}{2} MR$. Острия циклоиды лежат на прямой, проходящей через центр M в направлении (s). Вследствие такого оптического свойства кривая называется также фокальной линией круга. Эту кривую можно повседневно наблюдать в чашках и кружках.

Две соответствующих эпитрохоиды изображены на черт. 260. Все эпитрохоиды не имеют особенностей, если образующая точка расположена внутри движущегося круга, и наоборот, они имеют петли и двойные точки, если образующая точка взята вне круга. Циклоиды представляют переходный случай между обоими видами трохоид.

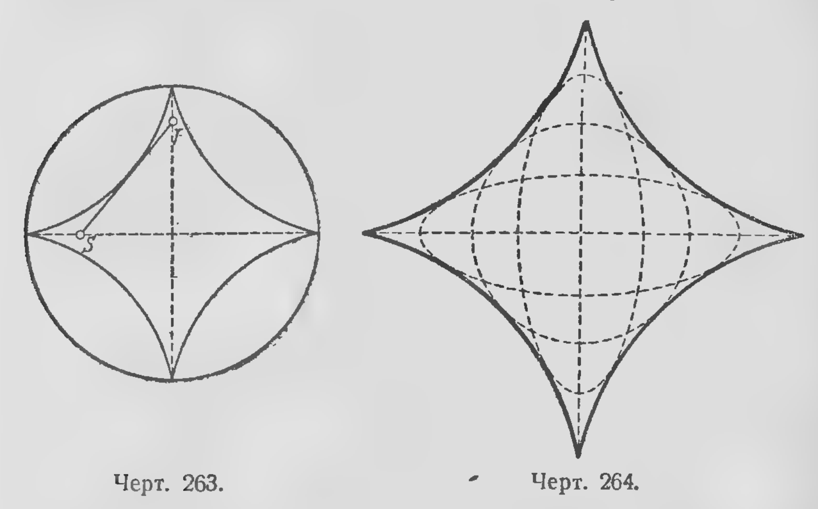


Черт. 262.

Следующий простой случай получается, когда радиус движущегося круга втрое меньше неподвижного. Гипоциклоида с тремя остриями изображена на черт. 262. Касательные к ней также обладают особым свойством, которое можно вывести аналитически. Отрезок касательной ST внутри кривой имеет постоянную длину, не зависящую от точки соприкосновения. Этот факт раньше связывали с упомянутой на стр. 190 геометрической минимальной задачей, заключающейся в следующем: требуется двигать отрезок прямой в плоскости таким образом, чтобы он повернулся на 180° вокруг средней точки и чтобы описанная при дви-

жении часть плоскости имела наименьшую площадь. Как уже было упомянуто, надлежаще выбранным движением можно эту площадь сделать произвольно малой, так что эта задача не имеет решения. Однако раньше думали, что задача имеет решение и что решение можно получить, заставляя отрезок ST двигаться в качестве касательной вдоль треугольной циклоиды так, чтобы концы его оставались на кривой (черт. 262). Действительно, может показаться, что этот кусок плоскости не может быть далее уменьшен.

Касательные к четырехугольной гипоциклоиде, обычно называемой астроидой (черт. 263), также обладают аналогичным свойством. Именно, обозначим через S и T точки пересечения касательной с осями симметрии кривой. Тогда отрезок ST имеет постоянную длину. Поэтому, если заставить отрезок скользить своими концами по двум взаимно перпендикулярным пересекающимся прямым, то этот отрезок огибает астроиду.



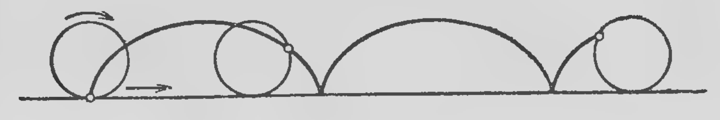
Черт. 263. Черт. 264.

Мы же упоминали выше, что всякая точка отрезка, движущегося таким образом, описывает эллипс. Отсюда можно заключить, что астроида огибается семейством эллипсов, у которого сумма осей имеет постоянную величину (черт. 264).

Вообще говоря, поведение циклоид весьма различно в зависимости от того, соизмеримы или нет радиусы r и R движущегося и неподвижного кругов. Если $\frac{r}{R}$ представляет рациональное число, которое может быть записано в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$, то циклоида имеет b остриев и замыкается после того, как подвижный круг сделает a оборотов по неподвижному. Напротив, если $\frac{r}{R}$ иррационально, то кривая имеет бесконечно много остриев и не замыкается. Можно показать, что в этом случае ко всякой точке области, описываемой катящимся кругом, кривая подходит произвольно близко, если только продолжать движение достаточно долго. Предельные случаи при $r=\infty$ или $R=\infty$ имеют особенно простой

смысл. Если $r=\infty$, то катящийся круг превращается в прямую, и мы получаем эвольвенту круга (черт. 8, стр. 14). Если же заменить неподвижный круг прямой, то получается «обыкновенная циклоида». Такую кривую описывает всякая точка окружности колеса, катящегося по прямой (черт. 265).

До сих пор мы рассматривали движения, при которых имеется только одна единственная движущаяся плоскость. Однако физика приводит к изучению более общих явлений относительного движения. Представим себе, что помимо неподвижной плоскости E и подвижной плоскости e имеется еще одна плоскость f, скользящая по плоскости E иным способом, чем e. Тогда плоскость f будет иметь вполне определенное движение также и по отношению к плоскости e, именно такое движение,

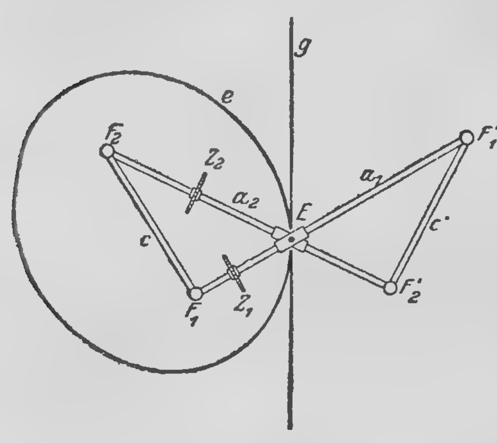


Черт. 265.

которое видит наблюдатель, связанный с плоскостью e. Движение (fE) плоскости f относительно плоскости E можно мыслить разложенным на движения (fe) и (eE). Часто изучение сложного движения можно упростить подобным разложением. Так, особенно просто можно разложить качение двух кругов K и k. Пусть E есть неподвижная плоскость круга K; f — подвижная плоскость круга k; M и m—центры кругов K и k. Чтобы описать движение точки m относительно плоскости E, нам необходимо ввести только одну плоскость e, по отношению к которой точка m неподвижна и которая вращается вокруг точки M. Движение плоскости f по отношению к плоскости e может быть только вращением вокруг точки m. Угловые скорости вращений вокруг точек M и m должны быть обратно пропорциональны радиусам кругов K и k. Таким образом непосредственно получаем циклоидальные движения как результат двух вращений. На этом основывается значение циклоид и трохоид в астрономии. В самом деле, так как пути планет вокруг Солнца представляют приближенно окружности и так как движения происходят с постоянной угловой скоростью и (приближенно) в одной и той же плоскости эклиптики, то с Земли пути планет представляются приближенно в виде трохоид. Поэтому докоперниканская геоцентрическая система астрономии дала толчок к обстоятельному изучению этих кривых.

В нашем примере точки M и m представляют мгновенные центры движений (eE) и (fe). Мгновенный центр Q циклоидального движения (fE), как уже было упомянуто, есть точка соприкосновения кругов k и K. Таким образом три мгновенных центра лежат на одной прямой. Можно показать, что вообще имеет место аналогичная теорема: если некоторое движение (fE) складывается из движений (fe) и (eE), то в каждый момент мгновенные центры движений (fE), (fe) и (eE) лежат на одной прямой.

42. Прибор для построения эллипсов и их рулетт [1]**.** Пусть два стержня c и c' одинаковой длины c шарнирно соединены своими концами F_1, F_2 и F'_1, F'_2 с двумя другими стержнями a_1, a_2 также одинаковой длины $a > c$, причем (черт. 266) так, что эти четыре стержня образуют плоский самопересекающийся четырехугольник с равными противоположными сторонами. Точка пересечения E стержней a_1 и a_2 будет изменять положение на этих стержнях, когда шарнирный четырехугольник будет принимать всевозможные положения на плоскости. Поместим в точке E шарнир с двумя вращающимися друг относительно друга гильзами, в которых могут скользить стержни a_1 и a_2. Закрепим теперь неподвижно стержень c и рассмотрим кривую, которую может описывать точка E. Мы утверждаем, что эта кривая есть эллипс e с фокусами F_1 и F_2 и с постоянной суммой расстояний a.



Черт. 266.

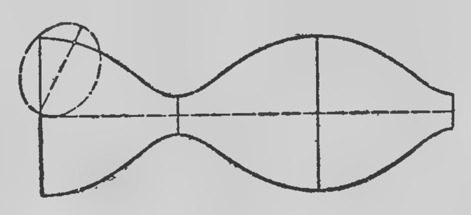
Доказательство. Треугольники $F_1F_2F'_2$ и $F_1F'_1F'_2$ при всяком положении шарнирного четырехугольника конгруэнтны, так как имеют попарно равные стороны. Отсюда $\measuredangle F_1F'_2F_2 = \measuredangle F'_2F_1F'_1$, т. е. треугольник $F_1F'_2E$ — равнобедренный, откуда следует далее: $F_1E + EF_2 = F'_2E + EF_2 = a$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь в произвольных точках стержней a_1 и a_2 закреплены два колесика Z_1 и Z_2, которые могут вращаться вокруг этих стержней, как вокруг осей, но не могут скользить по ним (черт. 266). Пусть точка E движется по некоторой кривой k и одновременно колесики катятся по плоскости этой кривой и определяют положение точек F_1 и F_2. Благодаря колесикам направление движения их центров совпадает с плоскостью колесиков и поэтому всегда перпендикулярно к стержню, на котором закреплено колесико. Но если так, то и всякая другая точка стержней a_1, a_2 всегда должна двигаться перпендикулярно к любому направлению стержня. Это можно строго вывести из того, что расстояния двух точек стержня остаются постоянными. Если теперь мы вообразим, что при движении со стержнем c жестко связана плоскость f, параллельная плоскости круга k, то точка E всегда будет служить мгновенным центром для движения этой плоскости. В самом деле, так как всякая точка плоскости f всегда движется перпендикулярно к линии, соединяющей ее со всяким мгновенным центром (стр. 241), и так как, с другой стороны, точка F_1 движется всегда перпендикулярно

[1] Этот прибор предложен Ейтсом (R. C. Yates, The Description of a surface of constant curvature Amer. Math. Monthly, 1931).

к стержню a_1, то мгновенный центр должен всегда лежать на a_1. Но то же самое также имеет место для a_2. Таким образом мгновенный центр должен совпадать с точкой пересечения этих стержней. Поэтому неподвижной полодией движения плоскости f служит кривая k, подвижной же полодией должен служить эллипс e, так как мы показали, что точка E описывает этот эллипс, если закрепить стержень c. Таким образом точки плоскости f при движении нашего аппарата движутся по тем же кривым, как при качении эллипса e по кругу k. Эти кривые называются рулеттами эллипса.

Среди рулетт эллипса особенно важна кривая, описываемая фокусом, когда эллипс катится по прямой. Одна из таких кривых изображена на черт. 267. Прибор Ейтса заставляет углы шарнирного четырехугольника двигаться по таким кривым, если точка E движется по некоторой прямой g. Всякая другая точка стержня a_1 описывает кривую, параллельную траектории точки F_1 или точки F'_1. В самом деле, стержень a_1 как уже упомянуто, есть общий перпендикуляр к траекториям всех его точек. Отсюда этот прибор приводит к замечательной геометрической теореме: будем наносить на всех нормалях к рулетте фокуса эллипса от основания нормали в сторону центра кривизны отрезки, равные постоянной сумме расстояний эллипса; тогда концы этих отрезков лежат опять-таки на рулетте фокуса некоторого эллипса, причем этот последний конгруэнтен с первым эллипсом и катится по такой же кривой, как первый, но с другой стороны.



Черт. 267.

Изображенная на черт. 267 рулетта является меридианом поверхности вращения с постоянной средней кривизной. Кривизна равна обратной величине полусуммы расстояний образующего эллипса. Мы уже упоминали на стр. 202, что для всякой поверхности с постоянной средней кривизной существует параллельная поверхность с постоянной положительной гауссовой кривизной. В нашем случае эта параллельная поверхность должна быть также поверхностью вращения, а ее меридианом должна служить кривая, параллельная меридиану первоначально рассмотренной поверхности. В соответствии с этим точка стержня a_1 нашего прибора описывает кривую, являющуюся меридианом некоторой поверхности вращения постоянной положительной гауссовой кривизны. Из соотношения для кривизны, приведенного на стр. 202, можно установить, что эта кривая описывается как раз серединой стержня a_1. Придавая стержням c и a всевозможную длину, можно получить меридианы всех поверхностей вращения с постоянной положительной гауссовой кривизной, за исключением шара.

43. **Движения в пространстве.** Перенесем рассуждения предыдущего параграфа на случай, когда некоторая область пространства r движется в пространстве R, принимаемом за неподвижное. В пространстве всякое отдельное движение может быть заменено одним вращением вокруг определенной оси и одним переносным движением вдоль этой оси, т. е.

винтовым движением (стр. 80). Вследствие этого всякому движению, за исключением переносного движения, соответствует определенная прямая в качестве винтовой оси или оси вращения. Исключительное положение переносного движения можно устранить, если рассматривать это движение как вращение вокруг бесконечно удаленной оси.

Сравнивая два соседних положения подвижного пространства, можно притти к построению мгновенной винтовой оси для каждого момента движения аналогично движению на плоскости. В процессе движения эта прямая непрерывно изменяет свое положение, причем описывает линейчатую поверхность как в пространстве R, так и в пространстве r. Эти поверхности соответствуют неподвижной и подвижной полодиям плоского движения и называются подвижным и неподвижным аксоидами движения. Пространственное движение вполне определено заданием обоих аксоидов, если только для некоторой прямой одного аксоида задана соответствующая прямая другого. Тогда необходимо наложить обе поверхности одну на другую так, чтобы обе эти прямые совпали, а поверхности соприкасались вдоль этой прямой. Движение получается, если подвижный аксоид катится по неподвижному, т. е. движется определенным образом, описанным ниже, так, что обе поверхности все время имеют общую прямую и соприкасаются вдоль этой прямой.

Таким образом мы видим здесь аналогию с движением на плоскости. Однако оба этих вида движения обнаруживают существенную разницу. Именно, в то время как плоскую кривую можно катить по любой другой плоской кривой множеством способов, линейчатая поверхность не может катиться по любой другой. Мы уже выяснили ранее, что две линейчатых поверхности могут тогда и только тогда соприкасаться вдоль образующей, когда они вдоль этой образующей имеют одинаковое закручивание. Если это имеет место, то необходимо наложить поверхности таким образом, чтобы соответствующие этим прямым горловины обеих поверхностей совпали. При качении обоих аксоидов необходимо, чтобы все время выполнялось это условие и поверхности сохраняли такое положение. Если на обеих поверхностях горловые линии в соответствующих точках образуют одинаковые углы с образующей, то мы имеем чистое качение без скольжения. Если, напротив, эти углы различны, то обе поверхности при качении в то же время скользят друг относительно друга вдоль общей образующей [1]). В первом, специальном, случае можно сказать, что движение слагается из бесконечно малых вращений. В этом случае оба аксоида представляют поверхности, налагающиеся одна на другую.

В качестве особенно простого примера рассмотрим случай, когда оба

---

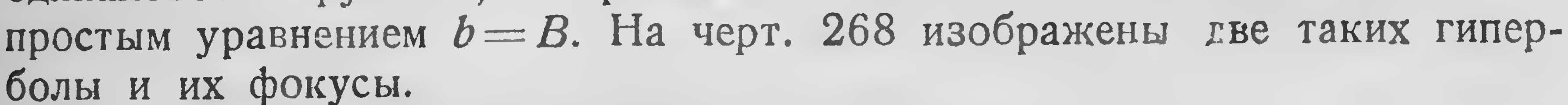
[1]) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы две линейчатые поверхности были аксоидами некоторого движения, не может быть понято без аналитических вспомогательных средств. Прежде всего горловые линии обеих поверхностей должны быть так отнесены друг к другу, чтобы поверхности в соответствующих точках имели одинаковое кручение. Тогда, если α, α' представляют углы горловых линий с образующими в соответствующих точках и s, s' — соответствующие длины дуг обеих горловых линий, то должно удовлетворяться уравнение:

$$\frac{ds'}{ds}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.$$

аксоида представляют однополостные гиперболоиды вращения. Горловыми линиями в этом случае служат наименьшие параллели этих поверхностей. Вследствие симметрии поверхностей вращения кручение постоянно и зависит только от вида и величины образующей гиперболы.

Гиперболоиды с одинаковым закручиванием легко охарактеризовать аналитически. Пусть в прямоугольной системе x, y координат образующие гиперболы выражаются уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1.$$



Черт. 268.

Таким образом осью вращения служит ось y. Требование, чтобы оба получающихся гиперболоида имели одинаковое кручение, выражается простым уравнением $b=B$. На черт. 268 изображены две таких гиперболы и их фокусы.

При качении *взаимное* расположение обоих гиперболоидов не меняется. Таким образом, если закрепить один гиперболоид, то ось вращения второго получит вращение вокруг оси вращения первого. Движение будет значительно упрощено, если мы заставим первую поверхность вращаться вокруг оси вращения в обратную сторону. Тогда ось второго гиперболоида (конечно также и первого) сохраняет неподвижное положение в пространстве. Следовательно, мы получим качение обеих этих поверхностей, если наложим их друг на друга так, что они будут соприкасаться вдоль некоторой прямой и будут вращаться обе вокруг своих осей вращения с соответствующим отношением скоростей.



Черт. 269.

Отсюда получается употребительный в технике способ зубчатой передачи между двумя непересекающимися осями. Так как при взаимном скольжении стирается материал, то для такой передачи необходимо ограничиться конгруэнтными гиперболоидами. Такая передача изображена на черт. 269.

ШЕСТАЯ ГЛАВА

ТОПОЛОГИЯ

В проективной геометрии мы уже встречались с такими фактами, которые могут быть установлены без измерения и сравнения длин и углов и которые тем не менее имеют вполне геометрический характер. Теперь, в топологии, мы будем иметь дело с геометрическими фактами, для установления которых не приходится привлекать даже понятия прямой и плоскости, а приходится иметь в виду только непрерывную связь между точками фигуры. Представим себе некоторую произвольно деформируемую фигуру из неразрываемого материала, отдельные части которой не могут склеиваться, и будем заниматься исследованием тех свойств, которые сохраняются при всевозможных произвольных искажениях фигуры, сделанной из подобного материала. При таком рассмотрении, например, все топологические свойства шара в одинаковой степени принадлежат также эллипсоиду, кубу и тетраэдру. Напротив, между шаром и тором имеется топологическое различие. В самом деле, непосредственно ясно, что шар без разрывов или склеиваний не может быть превращен в тор.

В истории геометрии как науки топологические проблемы, естественно, появляются еще позже, чем проективные, именно лишь в XVIII в. Впоследствии оказалось, что топологические предложения, несмотря на кажущуюся их неопределенность, связаны как раз с наиболее точными абстрактными математическими предложениями о величинах, именно с алгеброй, с теорией функций комплексного переменного и с теорией групп. В настоящее время топологические исследования являются наиболее плодотворными по сравнению с исследованиями во всех других отделах математики.

В последующем мы ограничимся некоторыми вопросами из топологии поверхностей в трехмерном пространстве [1]). Начнем с тех поверхностей, которые можно наиболее просто исследовать топологически, именно с многогранников.

44. Многогранники. Многогранником мы называем всякую систему многоугольников, связанных таким образом, что, с одной стороны, при

---

[1]) В качестве дальнейшего введения в основные понятия топологии можно упомянуть небольшую книжку Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie. На русском языке та же книжка с дополнениями В. Ефремовича вышла под названием: П. Александров и В. Ефремович, Очерк основных понятий топологии, ОНТИ, 1936.

каждом ребре сходятся (под некоторым углом) два и только два многоугольника, а с другой стороны, от всякого многоугольника данной системы можно перейти к другому, переходя через ребра.

Простейшие и наиболее важные многогранники суть те, которые могут быть превращены в шар при помощи непрерывной деформации. Мы их будем называть простыми многогранниками. Примеры простых многогранников представляют правильные многогранники (§ 14). Мы увидим, что существует помимо простых множество других многогранников, которые, следовательно, не могут быть превращены в шар.

Далее, правильные многогранники обладают тем свойством, что они не имеют входящих ребер. Отсюда следует, что правильные многогранники выпуклы. Выпуклым называется всякий многогранник, расположенный по одну сторону каждой из своих граней; такой многогранник можно положить на плоскость стола на любую из его граней. Выпуклость не является топологическим свойством, так как можно превратить выпуклый многогранник в невыпуклый при помощи некоторого топологически несущественного изменения. Однако из выпуклости многогранника можно сделать заключение об одном его топологическом свойстве. Именно: простое рассуждение показывает, что всякий выпуклый многогранник необходимо простой [1]).

Число вершин, ребер и граней простого многогранника связано между собой очень важным соотношением, которое называется эйлеровой теоремой о многогранниках в честь открывшего его ученого. Пусть E будет число вершин, K — число ребер, F — число граней многогранника; тогда эйлерова теорема о многогранниках утверждает, что число $E-K+F$ для всех простых многогранников равно 2:

$$E-K+F=2.$$

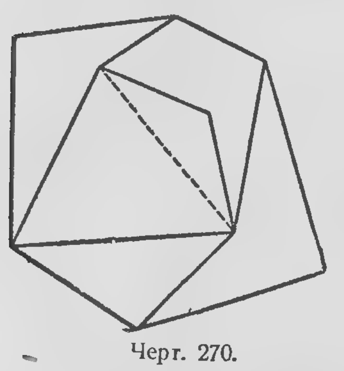
Проверим эту поразительную теорему на некоторых правильных многогранниках:

тетраэдр: $E-K+F=4-6+4=2$,
куб: $E-K+F=8-12+6=2$,
октаэдр: $E-K+F=6-12+8=2$.

Для доказательства теоремы Эйлера построим на плоскости изображение простого многогранника, которое мы назовем его плоской решеткой. Для этого выбросим одну из граней многогранника и деформируем остальные грани так, чтобы все они расположились в одной и той же плоскости. Этого можно достигнуть таким способом, чтобы все боковые грани сохранили вид многоугольников, ограниченных прямолинейными

[1]) Между выпуклыми и невыпуклыми многогранниками есть своеобразное различие. Именно, в то время как всякий замкнутый выпуклый многогранник представляет твердое тело, существуют замкнутые невыпуклые многогранники, боковые грани которых могут двигаться друг по отношению к другу. Жесткость выпуклого многогранника представляет аналогию с упомянутой ранее жесткостью замкнутых выпуклых поверхностей. Однако до сих пор не удалось вывести жесткость поверхностей из жесткости многогранников при помощи непосредственного предельного перехода.

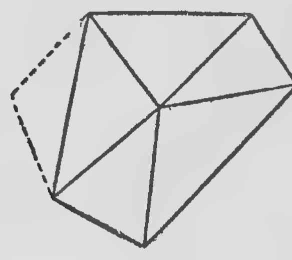
отрезками, и чтобы число вершин не изменилось. (Наоборот, невозможно сделать так, чтобы многоугольники на плоскости были все конгруэнтны исходным многоугольникам.) Получившаяся таким образом система многоугольников, расположенных на плоскости, называется плоской решеткой многогранника. Мы можем рассматривать черт. 153—157, стр. 132, как плоские решетки правильных многогранников.



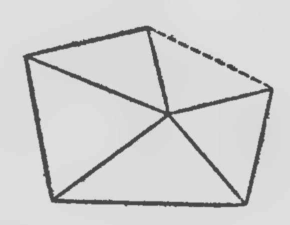
Черт. 270.

Плоская решетка содержит столько же вершин и ребер, как многогранник, но граней — на одну меньше. Сделаем теперь ряд изменений в плоской решетке так, чтобы при этом число $E-K+F$ осталось неизменным, а вид решетки упростился. Прежде всего, если в решетке имеется многоугольник, у которого более трех сторон, то в таком многоугольнике мы проведем диагональ. При этом прибавятся одна грань и одно ребро, число же вершин останется неизменным, так что число $E-K+F$ останется тем же самым (черт. 270). Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не получим решетки, у которой все грани суть треугольники.

Если мы к такой решетке, составленной из треугольников, добавим вдоль какого-нибудь ребра новый треугольник так, что две вершины, расположенные в концах взятого ребра, будут вершинами нового треугольника, то число вершин и граней возрастет на единицу, а число ребер возрастет на два (черт. 271). Таким образом рассматриваемое число опять останется неизменным. Точно так же это число не изменится,



Черт. 271.



Черт. 272.

если мы добавим ребро там, где контур решетки имеет входящий угол, соединив две вершины контура и получив при этом новый треугольник (черт. 272); в самом деле, при этом число вершин не изменится, а число ребер и граней возрастет на единицу.

Теперь можно непосредственно усмотреть, что произвольная решетка, составленная из треугольников, может быть получена из единственного треугольника путем многократного повторения этих двух операций. Таким образом число $E-K+F$ для всякой решетки, составленной из треугольников, и, следовательно, для всякой другой плоской решетки имеет то же самое значение, как и для одного единственного треугольника: $E-K+F=3-3+1=1$, а так как решетка эта имеет столько

же вершин и ребер, как простой многогранник, и одной гранью меньше, чем многогранник, то для простого многогранника должно иметь место равенство [1]):

$$E-K+F=2.$$

При помощи теоремы Эйлера можно дать новое простое доказательство того, что возможны лишь пять правильных многогранников (стр. 87). Пусть в рассматриваемом правильном многограннике во всякой вершине сходятся n граней и, значит, n ребер. Если E, K, F имеют то же значение, что и выше, то число ребер, выходящих из всех вершин, равно, следовательно, nE. Но при этом мы сосчитали два раза всякое ребро, так как каждое ребро соединяет две вершины. Следовательно,

$$nE=2K.$$

Пусть далее в рассматриваемом многограннике каждая грань ограничена r ребрами. Тогда rF есть число ребер, ограничивающих все грани многогранника; но при этом мы опять-таки сосчитали всякое ребро два раза, так как каждое ребро разделяет две грани. Таким образом $rF=2K$. Подставляя оба последних значения в эйлерову формулу, мы получаем:

$$\frac{2K}{n}-K+\frac{2K}{r}=2,$$

или, преобразуя эту формулу, имеем:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{K}.$$

В соответствии со значением чисел n и r они должны быть равны 3 или больше. С другой стороны, если бы эти оба числа были больше 3, то мы имели бы:

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{n}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0,$$

а это невозможно. Если положим $n=3$, то получим:

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{r}-\frac{1}{6}.$$

Таким образом для $n=3$ r может принимать только значения 3, 4, 5; тогда K получает значения 6, 12, 30. Так как наши равенства симметричны относительно n и r, то мы получаем отсюда соответствующие значения n

---

[1]) Пуанкаре обобщил теорему Эйлера на случай n-мерного пространства. Там вершинам, ребрам и граням соответствуют 0-, 1-, 2-, ..., $(n-1)$-мерные образы, число которых мы обозначим через $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$. Тогда для образов, соответствующих простым многогранникам, имеет место равенство:

$$N_0-N_1+N_2+\ldots=1-(-1)^n.$$

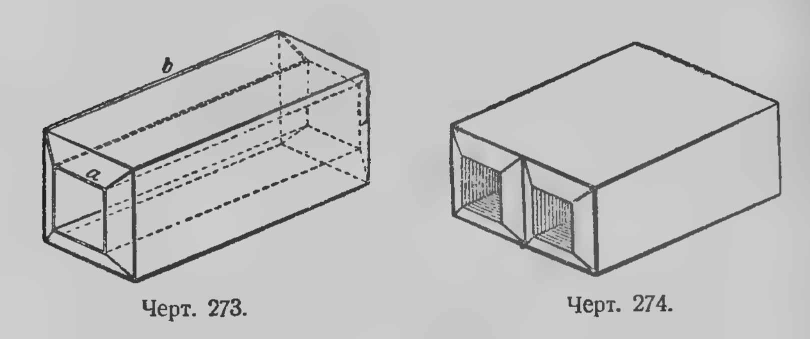
Для $n=3$ мы получаем формулу Эйлера.

для $r=3$. Таким образом мы нашли шесть единственно возможных случаев, причем два из них тождественны, именно: $n=3$, $r=3$. Остаются пять различных типов, и они действительно осуществляются в правильных многогранниках[1]).

Особенность этого доказательства в противоположность данному раньше (стр. 86) состоит в том, что мы при этом совсем не предполагали, что все грани суть правильные многоугольники. Мы предполагали только, что все грани ограничены одинаковым числом ребер и что в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Таким образом, если ограничиться простыми многогранниками, то «топологически правильных» многогранников существует столько же, сколько «метрически правильных».

Обратимся теперь к непростым многогранникам.

В качестве примера возьмем призматический блок (черт. 273). Он представляет собой четырехгранную призму, из середины которой вырезана параллельно расположенная четырехгранная призма; кроме того,



Черт. 273. Черт. 274.

оба основания, общие для обеих призм, скошены, как указано на чертеже. Такой многогранник нельзя превратить в шар, но заведомо можно превратить в тор[2]). Другие типы многогранников можно получить подобным же способом, вырезая несколько дыр (черт. 274).

Чтобы иметь возможность обозреть все такие многогранники, припишем каждому многограннику определенное число h, так называемую связность. Мы будем рассматривать замкнутые, не пересекающие сами себя ломаные, составленные из последовательных ребер многогранника. Если некоторый многогранник разбивается на две отдельных поверхности каждой такой ломаной, то мы припишем ему связность $h=1$. Этой связностью обладают, очевидно, все простые многогранники, так как шаровая поверхность может быть разбита на две части любой проведенной на ней замкнутой кривой. Обратно, можно непосредственно усмотреть, что всякий многогранник со связностью, равной единице, всегда может быть превращен в шар. Поэтому простые многогранники называются также простыми связными многогранниками.

На призматическом блоке имеются замкнутые ломаные, составленные

[1]) Подобным же образом обобщение эйлеровой теоремы Пуанкаре приводит к определению правильных ячеек, пространств высшего числа измерений.

[2]) Призматический блок также топологически правилен.

из ребер, не разбивающие этого многогранника (например квадрат a на черт. 273). Всем многогранникам, обладающим этим свойством, мы приписываем более высокую связность. Для того чтобы определить ее, рассмотрим все ломаные, составленные из ребер (не обязательно замкнутые), соединяющие две точки первоначально взятой ломаной.

Если всякая такая пара ломаных разбивает многогранник, то мы приписываем ему связность $h=2$. В противном случае мы продолжаем наше построение. Вообще дадим следующее определение:

Многогранник называется h-связным, если можно найти на нем $h-1$ ломаных, составленных из его ребер, совокупность которых не разбивает многогранника[1]*, но нельзя найти h ломаных, обладающих этим свойством. При этом первая из этих ломаных должна быть замкнутой, а все последующие соединяют две точки предыдущих.*

На призматическом блоке, как это видно из черт. 273, имеется система двух таких ломаных (квадрат a и трапеция b). Таким образом этот многогранник должен быть по меньшей мере трехсвязным. Мы сейчас увидим, что он действительно трехсвязен.

Теперь возникает вопрос, может ли быть обобщена теорема Эйлера, доказанная выше для односвязных многогранников, на многогранники произвольной связности h. Мы не можем ожидать, чтобы теорема осталась неизменной, так как при нашем доказательстве мы использовали плоскую решетку, построение которой, очевидно, возможно только для односвязных многогранников. Оказывается, можно показать, что вообще имеет место формула:

$$E-K+F=3-h.$$

Для $h=1$ эта формула дает доказанное выше равенство. Другой пример дает призматический блок. Очевидно, он имеет 16 вершин, 32 ребра и 16 граней и для него имеет место равенство:

$$16-32+16=3-3=0.$$

Отсюда следует, что призматический блок в точности трехсвязен. Точно так же и в общем случае теорема Эйлера является удобным средством для того, чтобы установить связность многогранника. Для этого необходимо только сосчитать вершины, ребра и грани и вовсе не нужно рассматривать ломаные, составленные из ребер.

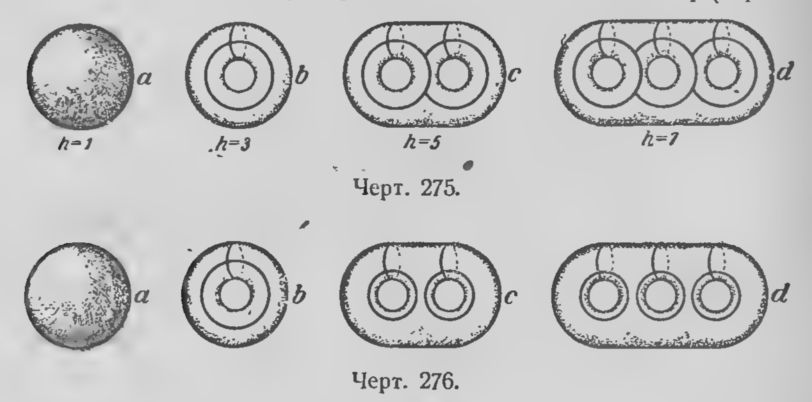
45. **Поверхности.** Мы уже видели, что простые многогранники могут быть деформированы в шаровую поверхность, а призматический блок — в тор. Подобным же способом можно заменять более сложные топологические образы многогранными фигурами. Таким путем теория этих образов приводится к изучению фигур, составленных из простых элементов, строение которых может быть легко указано. Этот способ рассмотрения, называемый «комбинаторной топологией», имеет еще то преимущество, что он может быть перенесен непосредственно на случай числа

[1] То-есть две произвольных точки многогранника можно всегда соединить кривой, лежащей на многограннике и не пересекающей ни одного из полигональных путей.

измерений более трех. В самом деле, структура многогранника может быть полностью описана при помощи схематического указания соединений составляющих его элементов, без привлечения пространственного представления.

В интересах наглядности, наоборот, часто бывает более целесообразным положить в основу непосредственно поверхности. Так, шар представляет более простой образ, чем простой многогранник, а тор более простой образ, чем призматический блок. Поэтому мы теперь перенесем понятие связности с многогранников на произвольные поверхности.

Для шара мы должны положить $h=1$, а для тора $h=3$. Поверхности более высокой связности мы можем получить, расплющивая шары, сделанные из пластической массы, и проделывая в них несколько дыр (черт. 275).



Черт. 275.

Черт. 276.

Подобные поверхности мы будем называть кренделями. Можно показать, что крендель с p дырами должен иметь связность $h=2p+1$. На чертеже изображены системы из 0, 2, 4, 6 кривых, не разбивающих на отдельные части кренделя со связностью, равной 1, 3, 5, 7. Легко видеть, что всякая следующая кривая, соединяющая две точки, лежащие на краях разрезов, должна разбивать соответствующую поверхность.

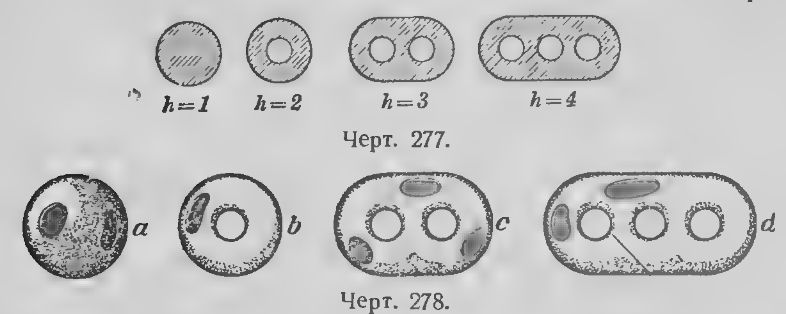
На поверхности можно свободнее выбирать кривые, чем это имело место на многогранниках, где мы ограничивались ломаными, составленными из ребер. Поэтому можно дать и другие определения связности поверхностей, например: на замкнутой h-связной поверхности можно провести $h-1$ замкнутых кривых, не разбивающих поверхность; но всякая система, состоящая из h подобных кривых, непременно разбивает поверхность. На черт. 276 изображены такие кривые для случаев $h=1$, 3, 5, 7.

Можно подчинить эти кривые еще одному условию, именно, потребовать, чтобы они проходили через определенную, произвольно выбранную точку поверхности. Таким образом можно получить удобную для многих целей «каноническую систему разрезов» поверхности, примеры которых даны на черт. 285, 286, 287 (стр. 261—263).

С другой стороны, теорема не остается неизменной, если ограничиться системами замкнутых кривых, не пересекающих друг друга. Для поверхностей нечетной связности можно доказать, что на замкнутой поверхности

связности $h=2p+1$ имеется p и не более, чем p, замкнутых, не пересекающих друг друга кривых, не разбивающих данной поверхности. В справедливости этой теоремы можно убедиться из черт. 276.

До сих пор мы рассматривали только такие поверхности, которые расположены целиком в конечной части пространства и не имеют границ. Можно распространить понятие связности и на более общие случаи. Сначала предположим, что поверхность лежит целиком в конечной части пространства, но имеет границу, состоящую из некоторого числа замкнутых кривых. Пусть эти кривые не пересекаются друг с другом и не пересекают сами себя. Тогда мы получим такие куски поверхностей, какие изображены на черт. 277. Другие типы подобных поверхностей можно получить, если представить, что изображенные на черт. 275 и 276 замкнутые поверхности — полые, и если в них проделать произвольное число дыр (черт. 278[1])). Для этих поверхностей мы также определим



Черт. 277.

Черт. 278.

связность при помощи системы кривых с единственным отличием от данного прежде определения: первая кривая не должна быть замкнутой, а должна соединять две точки границы; каждая добавляемая кривая должна начинаться в точках границы. Тогда поверхности, изображенные на черт. 278, должны иметь связности 2, 3, 7, 8.

Определение связности при помощи замкнутых кривых нельзя непосредственно перенести на поверхности, имеющие границу.

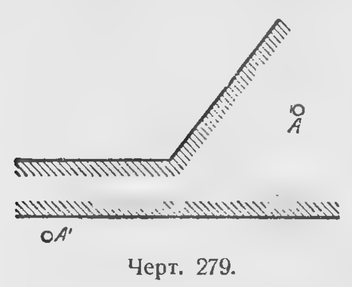
Допустим теперь, что поверхность, имеющая или не имеющая границу, простирается в бесконечность. Тогда топологическая структура поверхности зависит от того, будем ли мы рассматривать ее в метрическом или в проективном пространстве. В первом случае мы ограничимся конечными точками. Тогда пространство можно рассматривать так, как будто оно отделено от бесконечности сферой очень большого радиуса. Мы можем заменить поверхность той ее частью, которая расположена внутри этой сферы. Рассматриваемая часть поверхности представляет ограниченный кусок, расположенный в конечной части пространства, к которому мы можем применить теорию, изложенную выше[2]).

---

[1]) В противоположность поверхностям, изображенным на черт. 277, поверхности черт. 278, *b*, *c*, *d* не могут быть вырезаны из плоского листа бумаги даже при любой его деформации. (Выступающее здесь различие играет роль в геометрической теории функций.)

[2]) При этом предполагается, что мы можем взять столь большой шар, что находящийся внутри шара кусок поверхности не изменит своей топологической

В проективном пространстве мы встречаем совсем другие соотношения. Мы выше приписывали каждой прямой одну единственную, бесконечно удаленную точку, рассматривая прямую как замкнутую линию; обе ее ветви, простирающиеся в бесконечность, сливаются друг с другом в бесконечно удаленной точке прямой. Кроме того, эта точка принадлежит одновременно всем прямым, параллельным друг другу. В соответствии с таким представлением, проективное пространство в целом также замыкается своими бесконечно удаленными точками. Поверхность содержит бесконечно удаленную точку, если подвижная точка при движении по ней в некотором направлении все более приближается к определенной прямой, в направлении которой и расположена бесконечно удаленная точка. При этом вовсе не обязательно, чтобы поверхность и в противоположном направлении приближалась к некоторой параллельной прямой; бесконечно удаленная точка может быть граничной точкой поверхности. Если же поверхность в обе стороны приближается все более к двум параллельным прямым, то эту поверхность следует рассматривать как смыкающуюся в ее бесконечно удаленной точке. Далее, если поверхность имеет границу, простирающуюся в бесконечность, то кривая, образующая границу, должна замыкаться, проходя через бесконечность, т. е. либо в одинаковых направлениях, либо в противоположных она должна безгранично приближаться к двум параллельным прямым или содержать часть бесконечно удаленной прямой; в самом деле, незамкнутая кривая не может служить границей поверхности. Так, например, плоский кусок поверхности, ограниченный прямой и ломаной, составленной из двух полупрямых, изображенный на черт. 279, в проективном пространстве не замкнут по отношению к остальной части плоскости, так как возможен переход из точки A в точку A' через бесконечность. Между тем в метрическом пространстве тот же самый кусок плоскости ведет себя так, как если бы он был ограничен замкнутой кривой.



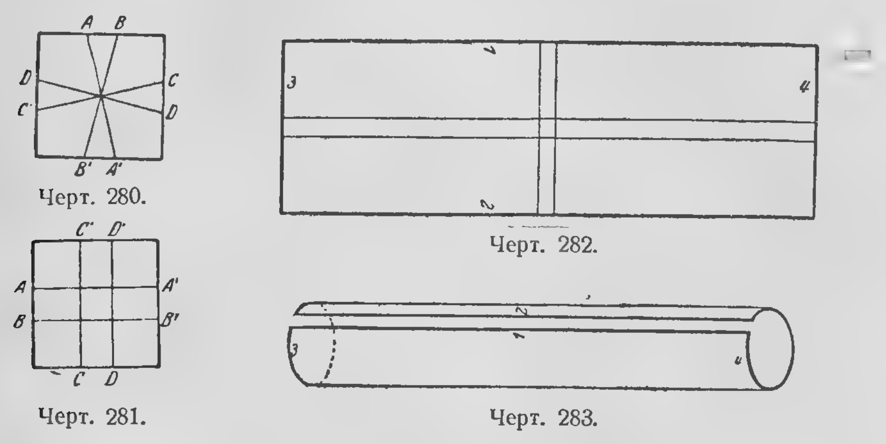
Черт. 279.

То же самое имеет место и для плоскости в целом. Метрическая плоскость имеет замкнутую границу, именно, бесконечно удаленную прямую. Таким образом она топологически эквивалентна внутренности круга. Напротив, проективная плоскость является замкнутой поверхностью. Для того чтобы получить простую топологическую модель проективной плоскости, будем исходить из рассмотренных выше построений (стр. 209, 212). Проективную плоскость мы отображали взаимно однозначно на поверх-

---

структуры при дальнейшем увеличении размеров шара. Можно легко указать примеры поверхностей, не удовлетворяющих этому предположению. Опишем, например, вокруг точек плоской квадратной решетки маленькие окружности, не пересекающие друг друга. Если удалить внутренность всех этих кругов из плоскости, то получится плоская поверхность. Для части этой поверхности, лежащей внутри шара, можно легко вычислить связность. Очевидно, однако, что эта связность безгранично возрастает при возрастании шара с сохранением его центра постоянным.

ность полушара, рассматривая две диаметрально противоположных точки большого круга, ограничивающего полушар, как тождественные. Подоб-



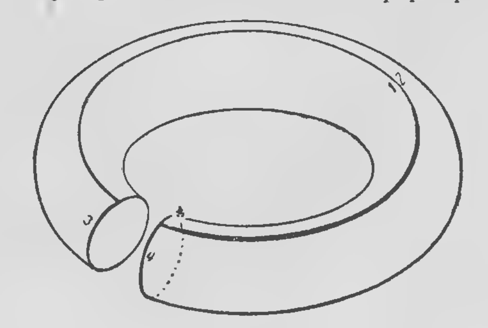
Черт. 280.

Черт. 281.

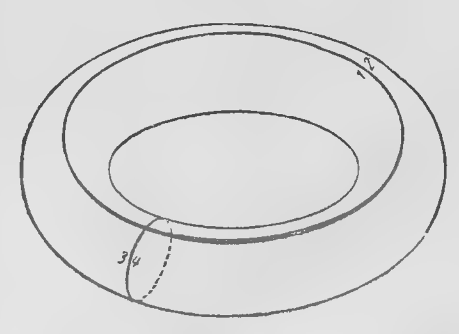
Черт. 282.

Черт. 283.

ным же образом мы могли бы вместо полушара использовать круг, так как его можно деформировать в полушар. Далее мы можем деформировать круг в квадрат. Поэтому проективная плоскость топологически эквивалентна квадрату (черт. 280), если мы будем считать каждую пару диаметрально противоположных точек границы квадрата за одну единственную точку (например точки A и A' на черт. 280). Замкнутым кривым проективной плоскости соответствуют в этой модели, во-первых, замкнутые кривые, а во-вторых, все те кривые, которые соединяют тождественные точки границы (например отрезок AA' на черт. 280).



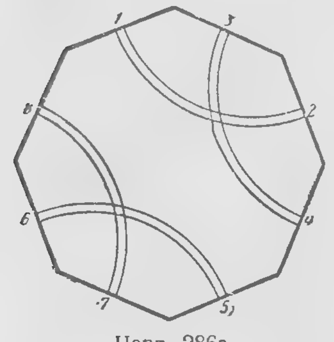
Черт. 284.



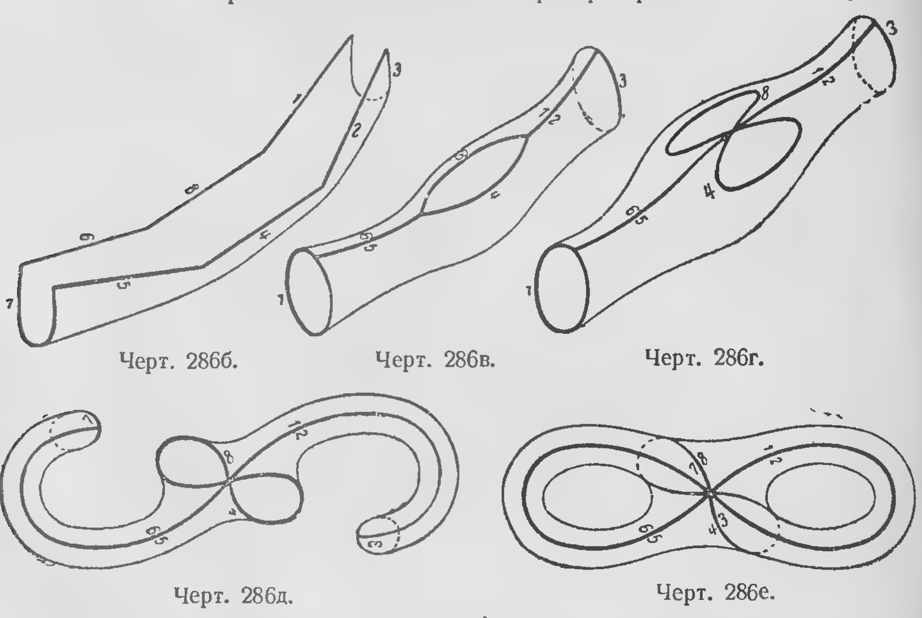
Черт. 285.

Топологическое исследование проективной плоскости мы продолжим позднее (стр. 272). Но способ, приведенный на черт. 280, немедленно приводит нас к другим подобным же построениям. Сначала мы будем исходить опять-таки из квадрата или из прямоугольника, но при этом будем считать тождественными точки границы, согласно схеме, приведенной на черт. 281. Мы опять получаем модель замкнутой поверхности. На этот раз изображаемую поверхность очень легко восста-

новить, исходя из модели. Согнем прямоугольник (черт. 282) сначала в кусок кругового цилиндра (черт. 283). При этом мы приложим стороны прямоугольника *1*, *2* друг к другу таким образом, чтобы тождественные точки этих сторон действительно совпали. Другие две стороны *3*, *4*, которые при этом переходят в круги, мы можем приложить друг к другу по тому же принципу, если изогнем круговой цилиндр (черт. 284). В конечном счете мы получим поверхность тора; граница прямоугольника перейдет в «каноническую систему разрезов» тора, причем каждый из разрезов соответствует двум противоположным сторонам прямоугольника (черт. 285 и 275, *b*). Обратно: если разрезать тор вдоль канонической системы, то всегда получается фигура, топологически эквивалентная прямоугольнику с указанным соответствием сторон. Этот способ можно распространить на все «крен-



Черт. 286а.



Черт. 286б. Черт. 286в. Черт. 286г.

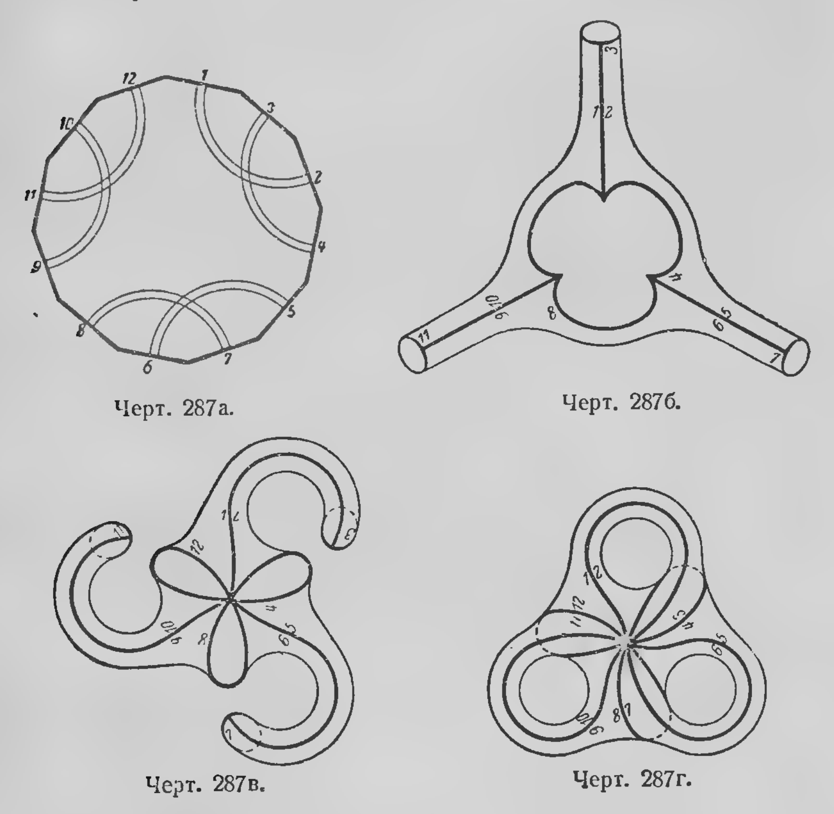
Черт. 286д. Черт. 286е.

дели». Если связность кренделя равна $2p+1$, то каноническая система разрезов состоит из $2p$ кривых. Следовательно, выполнив разрезы, получим $4p$-угольник с определенным соответствием сторон. На черт. 286 и 287 изображено это построение для случаев $h=5$, 7 и, следовательно, $p=2$, 3.

Отображение кренделей на $4p$-угольники играет важную роль как в теории непрерывных отображений (стр. 284), так и в теории функций (стр. 289). В этих приложениях исходят из того, что правильными $4p$-угольниками можно покрыть гиперболическую плоскость (если $p=1$, то эвклидову плоскость), что мы уже выяснили на стр. 227.

Если стороны $4p$-угольника склеивать иначе, то помимо кренделей можно получить большое число других поверхностей; некоторыми из них мы займемся ниже.

46. Односторонние поверхности. Все рассмотренные до сих пор многогранники и замкнутые поверхности имели нечетную связность. Поэтому возникает вопрос, существуют ли вообще замкнутые поверхности четной связности, т. е. образы, которые по своему топологическому поведению находятся посредине между шаром и тором или между двумя кренделями.



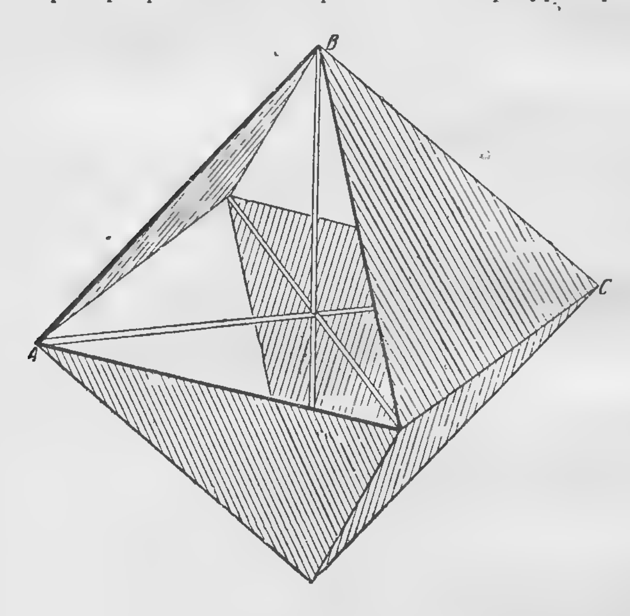
Черт. 287а. Черт. 287б.

Черт. 287в. Черт. 287г.

Попробуем разрешить этот вопрос. Построим многогранник, именно гептаэдр, который согласно теореме Эйлера о многогранниках должен быть двусвязным. Будем исходить из правильного октаэдра (черт. 288).

Добавим к восьми треугольным граням этого многогранника еще три квадрата, расположенных в трех плоскостях, определяемых диагоналями октаэдра (например $ABCD$ на черт. 288). Эти одиннадцать поверхностей не определяют многогранника, так как в противоположность данному выше определению к каждому ребру сходятся не две, а три поверхности. Удалим теперь четыре треугольника, а именно: на верхней половине октаэдра, изображенного на чертеже, левый передний треугольник и правый задний, а на нижней половине — левый задний и правый передний треугольники. В итоге остаются только четыре треугольника октаэдра,

которые на нашем чертеже заштрихованы. Таким способом мы построим фигуру, состоящую из четырех треугольников и трех квадратов. Ребра и вершины этой фигуры совпадают с ребрами и вершинами октаэдра, но диагонали октаэдра являются не ребрами, а линиями, проходящими сквозь нашу фигуру. Очевидно, в каждом ребре сходятся в точности две грани и от всякой грани можно перейти к любой другой, переходя через ребра. Таким образом наша фигура представляет многогранник; так как она имеет семь граней, то она называется гептаэдром. Так же, как и октаэдр, она имеет двенадцать ребер и шесть вершин. Для этого случая обобщенная теорема о многогранниках дает:



Черт. 288.

$$E-K+F=6-12+7=1=3-h.$$

Поэтому гептаэдр имеет связность $h=2$.

Как простые многогранники могут быть деформируемы в шар, точно так же имеется простая замкнутая поверхность, в которую можно деформировать гептаэдр. Это—поверхность, называемая «римской поверхностью» (черт. 289). Ее исследовал Штейнер. Она подобно гептаэдру имеет три попарно перпендикулярных отрезка, проходящих сквозь фигуру. В прямоугольных координатах она определяется уравнением:

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+xyz=0,$$

т. е. представляет собой поверхность четвертого порядка.

Помимо четной связности и наличия кривых самопересечения поверхности, гептаэдр обладает еще одним важным свойством, которое отличает его от всех до сих пор рассмотренных поверхностей. Представим себе, что эта поверхность осуществлена при помощи некоторой перепонки, и рассмотрим некоторое существо, например жука, который ползет по этой перепонке, начиная с некоторой точки P. Напротив этой точки, с другой стороны тонкой перепонки, расположена некоторая точка P', совпадающая с точкой P, если заменить перепонку первоначальной геометрической поверхностью. Казалось бы, что жук не может попасть из точки P в точку P' иначе, как проделав в каком-нибудь месте перепонки дыру. Такое предположение верно по отношению к шару и ко всем

кренделям, которые мы рассматривали до сих пор. Однако гептаэдр представляет собой поверхность, для которой такое предположение не оправдывается. Выберем в качестве исходной точки P некоторую точку на квадратной грани, параллельной плоскости чертежа, на стороне, обращенной к наблюдателю (черт. 290). Рассмотрим теперь путь, который



Черт. 289а.



Черт. 289б.

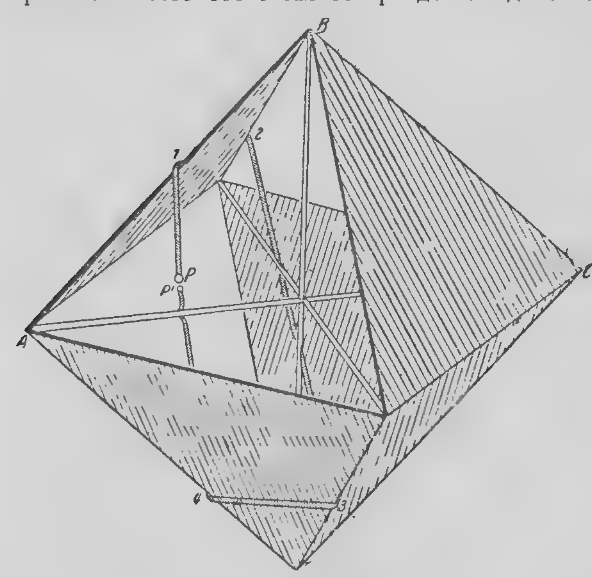
ведет по поверхности гептаэдра из точки P, пересекает ребра *1*, *2*, *3*, *4* и затем снова приводит на первоначальную квадратную грань. Жук, который путешествует по этому пути, очевидно, переходя через ребро *4*, попадает на обратную сторону той квадратной грани, с лицевой стороны которой он начал свое путешествие. Ему приходится трижды просверливать перепонку гептаэдра, но не ту грань, по которой он путешествует, а другую грань, которая преграждает ему дорогу в точках самопересечения поверхности.



Черт. 289в.

Вследствие этого гептаэдр называется односторонней поверхностью, в то время как шар и рассмотренные до сих пор крендели называются двусторонними. Для поверхностей, имеющих границу, также можно провести такое различие. Для этого следует посмотреть, имеется ли на поверхности (которую рассматриваем как перепонку) такой путь, который ведет с одной стороны поверхности на другую без того, чтобы при этом приходилось пересекать границу поверхности или просверливать поверхность в том месте, через которое проходит рассматриваемый путь. Если такой путь на поверхности имеется, то поверхность называется

односторонней; в противном случае — двусторонней. Поверхности с границей, рассмотренные нами до сих пор, были все двусторонними, например круг. Оказывается, можно привести пример гораздо более простой, чем гептаэдр, односторонней поверхности, имеющей границу, именно, поверхность Мебиуса. Мы построим эту поверхность из бумажной полоски, которая имеет вид сильно вытянутого прямоугольника (черт. 291). Если мы сложим короткие стороны AB и CD так, что точка A совпадет с точкой C, а точка B с точкой D, то получим, как мы уже видели выше, кусок кругового цилиндра, двустороннюю поверхность с двумя краями. Вместо этого мы теперь до складывания повернем на 180° один конец полосы по отношению к другому. Следовательно, мы сложим концы так, что точка A совпадет с точкой D, а точка B с точкой C (черт. 292). Мы получим модель мебиусовой поверхности. Легко убедиться, что эта поверхность односторонняя. Начертим, например, до складывания линию PP', параллельную длинным сторонам прямоугольника. Эта прямая после складывания перейдет в линию QQ', которая представляет путь, ведущий с одной стороны полосы на другую [1]).

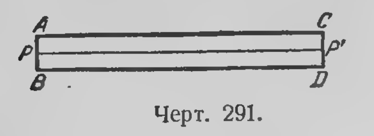


Черт. 290.

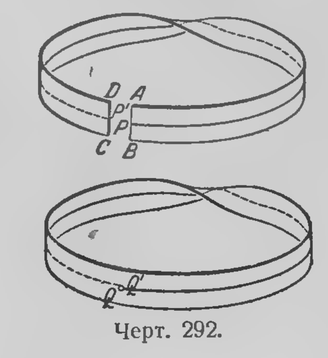
Односторонние поверхности можно охарактеризовать при помощи другого важного топологического понятия, для формулировки которого не приходится предполагать, что поверхность представляет собой перепонку. Представим себе, что вокруг всякой точки заданной поверхности (за исключением точек границы, если таковая имеется) проведена малая замкнутая кривая, целиком расположенная на поверхности. Попытаемся теперь на всех этих замкнутых кривых так определить направление обхода, что достаточно близкие точки будут обходиться всегда в одном и том же направлении. Если такое установление направления обхода возможно, то оно называется ориентацией поверхности и поверхность называется ориентируемой. И вот, односторонние поверхности никогда

[1]) Различие между мебиусовой поверхностью и цилиндрической полосой можно усмотреть также в следующих двух явлениях: граница мебиусовой поверхности не распадается на две замкнутые кривые, подобно границе цилиндрической полосы, а состоит из одной единственной замкнутой кривой. Далее, если разрезать мебиусову поверхность вдоль кривой QQ', то она не распадается подобно цилиндрической полосе, а остается связной.

не могут быть ориентируемы. Для доказательства этого представим себе один из тех замкнутых путей, существование которого равнозначно односторонности поверхности, например путь QQ' на мебиусовой поверхности, причем мы опять будем рассматривать точки Q и Q' как тождественные. Если установим для точки Q некоторое направление обхода и если сохраним это направление обхода на протяжении всего пути QQ', то в точку $Q=Q'$ мы необходимо придем с обратным направлением обхода. Такое явление не могло бы наступить, если бы поверхность Мебиуса была ориентируемой. То же самое имеет место и для всех других односторонних поверхностей. Обратно, можно показать, что все двусторонние поверхности ориентируемы. Таким образом разделение поверхностей на двусторонние и односторонние тождественно с разделением на ориентируемые и неориентируемые.

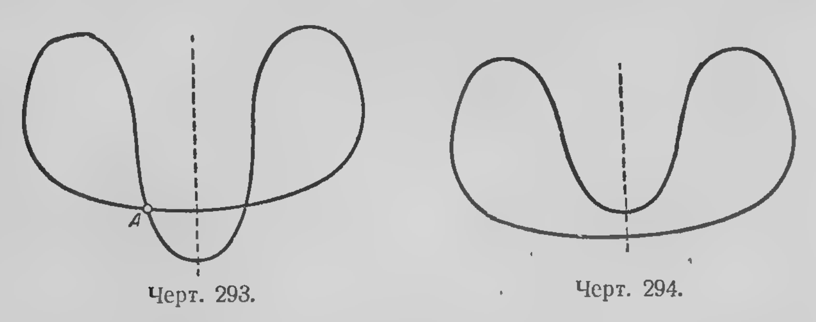


Черт. 291.



Черт. 292.

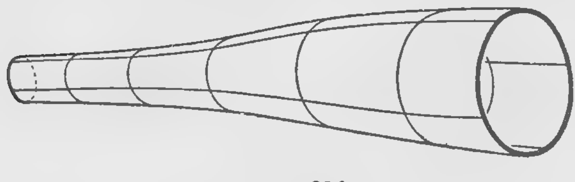
Легко видеть, что поверхность тогда и только тогда неориентируема, если на ней имеется некоторая замкнутая кривая s, такая, что малая ориентированная окружность, центр которой непрерывно движется по кривой s, приходит в начальную точку ориентированной в противоположном направлении (например кривая QQ' на черт. 292). Если на



Черт. 293. Черт. 294.

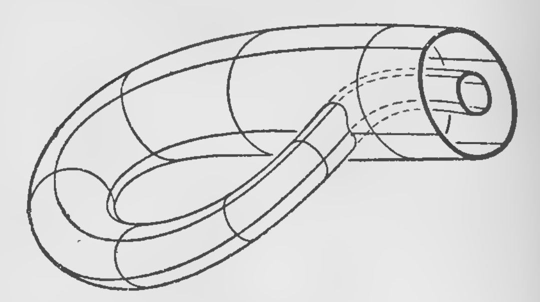
поверхности двигаться вдоль кривой s по одну сторону от этой кривой (по одному ее «берегу»), то в конце концов можно оказаться по другую сторону кривой, хотя при этом движении не приходилось пересекать кривую. Поэтому говорят, что кривая s имеет один «берег». В то время как на ориентируемых поверхностях все кривые имеют два берега, наличие замкнутых однобережных кривых характерно для неориентируемых поверхностей. Односторонние поверхности и однобережные кривые взаимно обусловливают друг друга. Первое свойство относится к расположению поверхности в пространстве, а второе — к расположению кривой на поверхности.

В противоположность мебиусовой поверхности гептаэдр содержит линии, проходящие сквозь поверхность. Казалось бы, всякая односторонняя замкнутая поверхность должна пересекать сама себя. В самом деле, эти поверхности имеют только одну сторону и, следовательно, не могут отграничивать части пространства от всего остального пространства, т. е. они не разбивают пространство на внутреннюю и внешнюю части. Для замкнутой поверхности без лежащих на ней линий самопересечения такое поведение нельзя себе представить. И действительно, все односторонние замкнутые поверхности пересекают сами себя. Однако доказательство этого должно быть проведено совершенно иным путем.

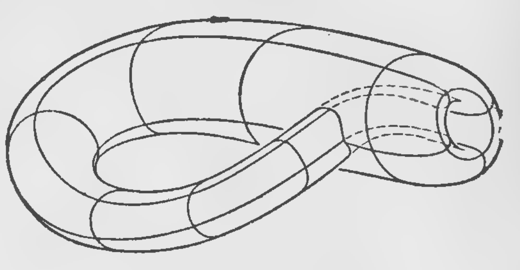


Черт. 295.

Не всякое самопересечение поверхности представляет топологическую особенность. Рассмотрим, например, поверхность вращения, возникающую при вращении изображенной на черт. 293 кривой вокруг пунктирной прямой этого чертежа. Точка A описывает окружность, представляющую кривую самопересечения этой поверхности. Однако путем непрерывной деформации можно перевести эту поверхность в поверхность вращения, образующая кривая которой изображена на черт. 294. Эта поверхность не пересекается сама с собой и, очевидно, топологически эквивалентна шару. Обратно, можно получить из шара описанную поверхность вращения. Таким образом наличие кривых самопересечения не представляет существенного топологического свойства. В то время как здесь кривая самопересечения замкнута, кривая самопересечения гептаэдра имеет шесть концевых точек, именно вершины гептаэдра. Эти точки действительно следует рассматривать как особенности. Окрестность обыкновенной точки поверхности всегда может быть непрерывной деформацией преобразована в круг; для окрестности вершины гептаэдра (черт. 288) подобная деформация не всегда возможна. Гептаэдр имеет шесть особых точек, и возникает вопрос, имеются ли вообще односторонние замкнутые поверхности без особых точек,



Черт. 296.



Черт. 297.

Клейн первый дал пример подобной поверхности. Будем исходить из трубы, открытой с обеих сторон (черт. 295). Выше мы получали из подобной трубы путем ее изгибания и склеивания границ поверхность тора. Сейчас мы будем прикладывать границы друг к другу несколько иным способом. Представим себе, что один конец трубы несколько уже, чем другой, и соответствующим изгибанием добьемся такого расположения, чтобы более узкий конец трубы, пройдя через стенку трубы, выходил в отверстие широкой части трубы так, чтобы оба граничных круга расположились концентрично (черт. 296). Изгибая теперь внешний широкий круг внутрь, а внутренний узкий круг наружу, мы можем соединить обе границы так, чтобы при этом не получалось особенностей. Таким образом мы получим поверхность Клейна («бутылку Клейна») (черт. 297). Она, очевидно, односторонняя и имеет замкнутую кривую самопересечения в том месте, где мы воткнули узкий конец трубы в стенку широкой ее части.

Первый пример замкнутой односторонней поверхности, именно, гептаэдр, отличался от рассмотренных выше двусторонних замкнутых поверхностей тем, что он имел четную связность; поэтому мы могли бы ожидать, что и поверхность Клейна также имеет четную связность. В действительности же эта поверхность трехсвязна так же, как и тор. Каноническая система разрезов может быть здесь выбрана так же, как и в случае тора; в качестве первого замкнутого разреза выберем шов, вдоль которого были соединены концы трубы. За второй разрез примем ту кривую, которая переходит в отрезок образующей цилиндра, если разрезать поверхность Клейна вдоль шва и снова привести ее в цилиндрический вид. После разрезания поверхности Клейна вдоль этих двух кривых она так же, как и тор, переходит в прямоугольник. Но всякая кривая, соединяющая две точки контура прямоугольника, разбивает прямоугольник; поэтому для поверхности Клейна имеем согласно общему определению $h-1=2$, т. е. $h=3$, что и требовалось доказать.

Таким образом мы получили из прямоугольника (или квадрата) посредством склеивания его сторон различными способами пять различных поверхностей, которые сопоставлены в таблице[1]) (см. таблицу на стр. 270).

Содержащиеся в таблице данные относительно проективной плоскости ниже будут обоснованы.

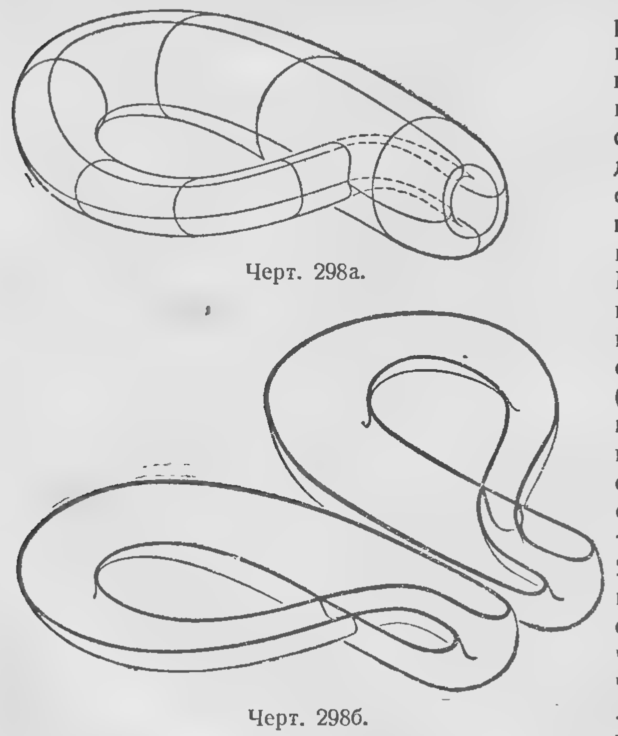
Из этой таблицы следует, что мы можем получить мебиусову поверхность из модели бутылки Клейна, если мы устраним одно из двух склеиваний границ. Следовательно, если разрезать поверхность Клейна вдоль соответственно выбранной замкнутой кривой, то мы должны получить поверхность Мебиуса. Предоставляем читателю проделать это на модели. На черт. 298 показано превращение бутылки Клейна в две мебиусовых полосы путем ее разрезания. Читатель может попытаться сделать соответствующий переход на квадратной модели.

В то время как мы имели примеры замкнутых односторонних поверхностей как с четной, так и с нечетной связностью (гептаэдр и поверхность Клейна), приведенные до сих пор замкнутые двусторонние поверхности

[1]) В проективном пространстве следует рассматривать однополостный гиперболоид как поверхность, замкнутую в бесконечности. На основании приведенной таблицы читатель может определить, эквивалентен ли топологически однополостный гиперболоид, рассматриваемый с этой точки зрения, бутылке Клейна или тору.

	Плоское круговое кольцо	Две граничных кривых	$h=2$	Двусторонняя
	Лист Мебиуса	Одна граничная кривая	$h=2$	Односторонняя
	Тор	Замкнутая поверхность	$h=3$	Двусторонняя
	Бутылка Клейна	Замкнутая поверхность	$h=3$	Односторонняя
	Проективная плоскость	Замкнутая поверхность	$h=2$	Односторонняя

всегда имели нечетную связность. Можно показать, что не существует замкнутых двусторонних поверхностей четной связности.



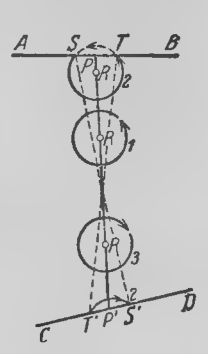
Черт. 298а.

Черт. 298б.

Так же, как для квадрата, можно для всякого правильного $4p$-угольника, склеивая различными способами его стороны, получить модели большого числа одно- и двусторонних поверхностей с границей и без границы. Пусть AB и CD — две поставленные в соответствие друг другу стороны $4p$-угольника (черт. 299); тогда возможны два вида соответствия: 1) две линии, соединяющие соответствующие друг другу точки, не пересекаются; 2) две такие линии пересекаются. Первый случай можно получить, например, если на черт. 299 отождествить A и C и B и D, а второй случай, если отождествляются точка A с точкой D и точка B с точкой C. Мы утверждаем следующее: если какие-нибудь две стороны $4p$-угольника постав-

лены в соответствие друг другу по второму способу, то получающаяся поверхность всегда односторонняя, независимо от того, какой вид соответствия выбран для других сторон.

Для доказательства воспользуемся методом, приведенным на стр. 267, и покажем, что получающаяся поверхность неориентируема. Пусть P и P' (черт. 299) — две отождествленных точки сторон AB и CD. Тогда отрезок прямой PP' представляет замкнутый путь на поверхности. Точка, проходящая этот путь по поверхности, представлена точкой R, пробегающей путь по прямой PP' сначала до точки P и затем возвращающейся из точки P' в свое первоначальное положение. Припишем теперь точке поверхности, изображаемой точкой R, некоторое направление обхода, которое не должно изменяться при движении этой точки. Для этого опишем вокруг точки R окружность весьма малого радиуса и изберем на этой окружности определенное направление обхода. Эта окружность должна непрерывно двигаться вместе с точкой R. При приближении точки R к точке P только дуга ST окружности остается внутри $4p$-угольника. Чтобы получить на поверхности изображение замкнутой кривой, необходимо привлечь точки $S'T'$, лежащие на прямой CD и отождествленные с точками ST. Но так как прямые AB и CD приведены в соответствие друг другу по второму способу, то точки S и S', а также точки T и T' расположены по разные стороны отрезка PP'. Таким образом замкнутая кривая на поверхности, имеющая определенное направление обхода, изображается двумя дугами $\overrightarrow{ST}$ и $\overrightarrow{T'S'}$. Эта кривая не претерпевает разрыва, когда точка R приходит в точку P, и начинает двигаться далее из точки P'. При удалении точки R на достаточное расстояние от точки P', дуга ST постепенно исчезает, а дуга $T'S'$ переходит в полную окружность. Однако эта окружность имеет направление обхода, противоположное тому, которое имела окружность при начале движения; таким образом мы доказали, что изображаемая поверхность неориентируема.



Черт. 299.

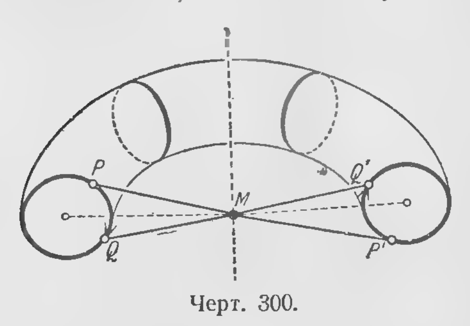
Односторонность проективной плоскости является частным случаем нашей теоремы: в модели проективной плоскости все соответствия — второго рода.

Обратно можно легко показать, что если все соответствия — первого рода, то модель всегда представляет двустороннюю поверхность.

Модель проективной плоскости мы получали из шаровой поверхности; в то же время поверхность Клейна оказалась связанной с тором, но в этом случае отношение между ними было другого рода, чем связь между шаром и проективной плоскостью. Покажем теперь, что в действительности между поверхностью Клейна и тором можно установить такое же соответствие, как между шаром и проективной плоскостью, и что вообще со всякой односторонней поверхностью можно таким же образом привести в соответствие некоторую двустороннюю поверхность.

Мы получили из поверхности шара проективную плоскость, рассматривая пары диаметрально противоположных точек как тождественные

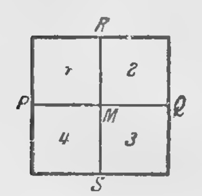
точки (стр. 209). Проведем теперь такое же построение для тора. Будем называть центром тора точку M, в которой ось тора пересекается со всеми перпендикулярами, опущенными на нее из центров образующих кругов (черт. 300). Если P — какая-нибудь точка на торе, то точка P', расположенная симметрично с точкой P относительно центра M, также лежит на торе. Будем называть диаметрально противоположными точками две точки тора, расположенные симметрично относительно точки M. Если рассматривать все пары диаметрально противоположных точек тора как тождественные, то можно получить из тора новую поверхность F. Мы утверждаем, что это есть поверхность Клейна.



Черт. 300.

Для доказательства рассмотрим образующий круг тора. Этому образующему кругу соответствует другой образующий круг, как это видно на черт. 300. Этими двумя кругами тор разбивается на две половины. Мы можем получить поверхность F, если отбросим одну половину тора, а в оставшейся половине отождествим точки границ, как было указано выше; соответственно этому для построения проективной плоскости достаточно было брать полушар вместо целого шара. Рассматривая теперь направление обхода на отождествляемых окружностях, можно убедиться, что при этом отождествлении из половины тора получается поверхность Клейна.

Очевидно, мы можем вторую половину тора наложить на первую таким образом, чтобы все диаметрально противоположные точки попарно совпали. При этом, как легко убедиться, мы должны вторую половину тора вывернуть наподобие перчатки так, чтобы внутренняя поверхность стала внешней. Если мы сложим опять обе половины, то тор превратится в дважды покрытую поверхность Клейна[1]). Поэтому говорят, что тор представляет двулистную поверхность наложения для поверхности Клейна. Точно так же шар определяют как двулистную поверхность наложения проективной плоскости. Вообще можно доказать, что для произвольной односторонней поверхности существует двусторонняя поверхность, являющаяся для первой двулистной поверхностью наложения.



Черт. 301.

47. Проективная плоскость как замкнутая поверхность. Для определения связности проективной плоскости применим к квадратной модели теорему Эйлера о многогранниках. Проведем через центр M квадрата (черт. 301) параллели PQ и RS к сторонам квадрата. Таким способом мы разобьем квадрат на четыре квадрата: 1, 2, 3, 4. Вследствие соответствия сторон большого квадрата квадраты 1 и 3 изображают один и тот же многоугольник проективной плоскости. То же

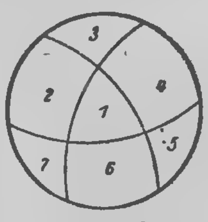
[1]) Это построение не может быть проведено при помощи простой деформации тора, как могло бы показаться с первого взгляда. Необходимо тор разрезать, чтобы можно было вывернуть одну половину тора.

самое справедливо для квадратов 2 и 4. Далее стороны PM и QM следует рассматривать как одно и то же ребро, так как точки P и Q представляют одну и ту же точку. Точно так же стороны RM и SM образуют одно и то же ребро. В качестве вершины следует рассматривать только одну точку. Поэтому в формулу Эйлера следует подставить:

$$E=1,\ K=2,\ F=2.$$

Теорема Эйлера дает:

$$E-K+F=1=3-h.$$

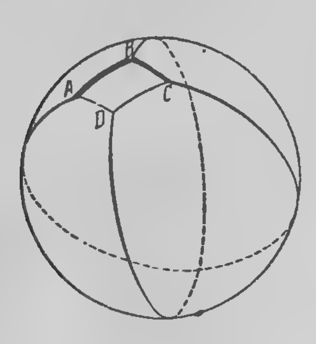


Черт. 302.

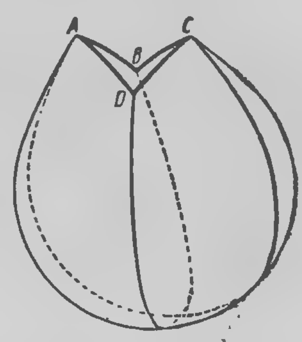
Следовательно, проективная плоскость двусвязна, как это указано в таблице на стр. 270.

В аналитической проективной геометрии играет роль другое разбиение плоскости, которое возникает при введении трилинейных координат. Это разбиение изображено на черт. 302, причем вместо квадрата использован в качестве модели круг. Эта поверхность разбивается на семь областей тремя дугами, не проходящими через одну и ту же точку. Допустим, что каждая из этих дуг пересекается с границей круга в диаметрально противоположных точках. Тогда области 2 и 5 составляют один единственный треугольник; точно так же области 3 и 6, 4 и 7 определяют по одному треугольнику. Можно убедиться, что три прямых, не проходящих через одну и ту же точку, разбивают проективную плоскость подобным же образом на четыре треугольника[1]). Теперь нужно подставить в формулу Эйлера $E=3$, $K=6$, $F=4$, и мы снова получаем $h=2$.

Точно так же, как мы получали поверхность тора и поверхность Клейна из их квадратных моделей путем склеивания сторон, мы можем



Черт. 303.

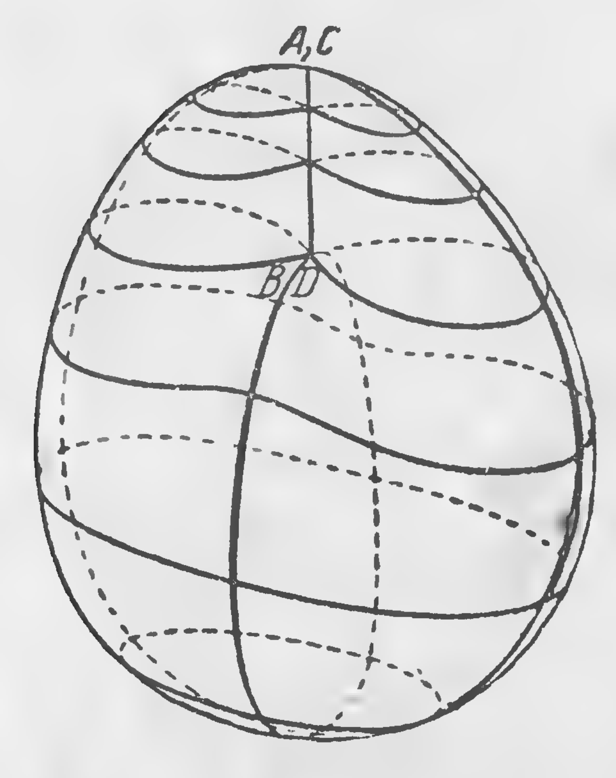


Черт. 304.

использовать квадратную модель для получения проективной плоскости. Для этого деформируем сперва квадрат, превратив его в поверхность шара, из которого вырезан малый четырехугольник $ABCD$ (черт. 303). Далее

[1]) Изображенные на черт. 301 и 302 разбиения проективной плоскости мы получали на стр. 134, 135 при помощи проекции октаэдра. Как читатель может убедиться, это же самое разбиение имеет место на поверхности гептаэдра. Эта поверхность, следовательно (так же как и «римская» поверхность Штейнера), представляет собою модель проективной плоскости.

следует склеить AB с CD и DA с BC. Это будет возможно, если мы приподнимем поверхность в точках A и C и опустим в точках B и D, сблизив точки A и C и точки B и D (черт. 304). В конечном счете мы получим замкнутую поверхность, имеющую в качестве линии самопересечения прямолинейный отрезок (черт. 305). Эта поверхность топологически эквивалентна проективной плоскости.



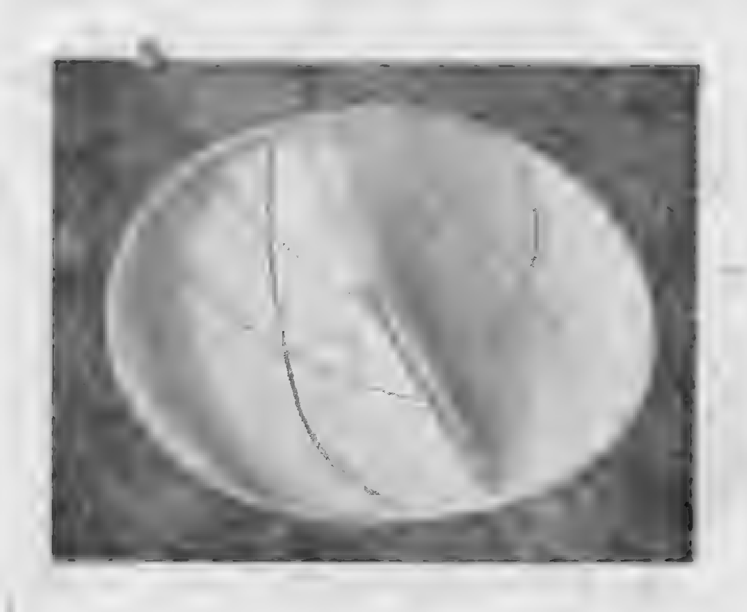
Черт. 305.

Существует алгебраическая поверхность, имеющая этот вид (черт. 306). Уравнение этой поверхности:

$$(k_1x^2 + k_2y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0.$$

Эта поверхность связана с некоторым дифференциально геометрическим построением. Будем исходить из точки P на некоторой поверхности F, выпуклой в точке P. Построим круги кривизны в точке P для всех нормальных сечений этой поверхности (стр. 165, 166). Тогда это семейство кругов опишет поверхность, изображенную на черт. 306, а ее внутреннее ребро есть отрезок нормали к начальной поверхности в точке P; приведенное уравнение относится к прямоугольной системе координат, начало которой находится в точке P, а оси x и y совпадают с направлениями главных радиусов кривизны поверхности F в точке P. k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности F в точке P.

Если мы опять будем исходить из черт. 304, но при этом будем складывать только AB с CD, но не DA с BC, то получим поверхность,



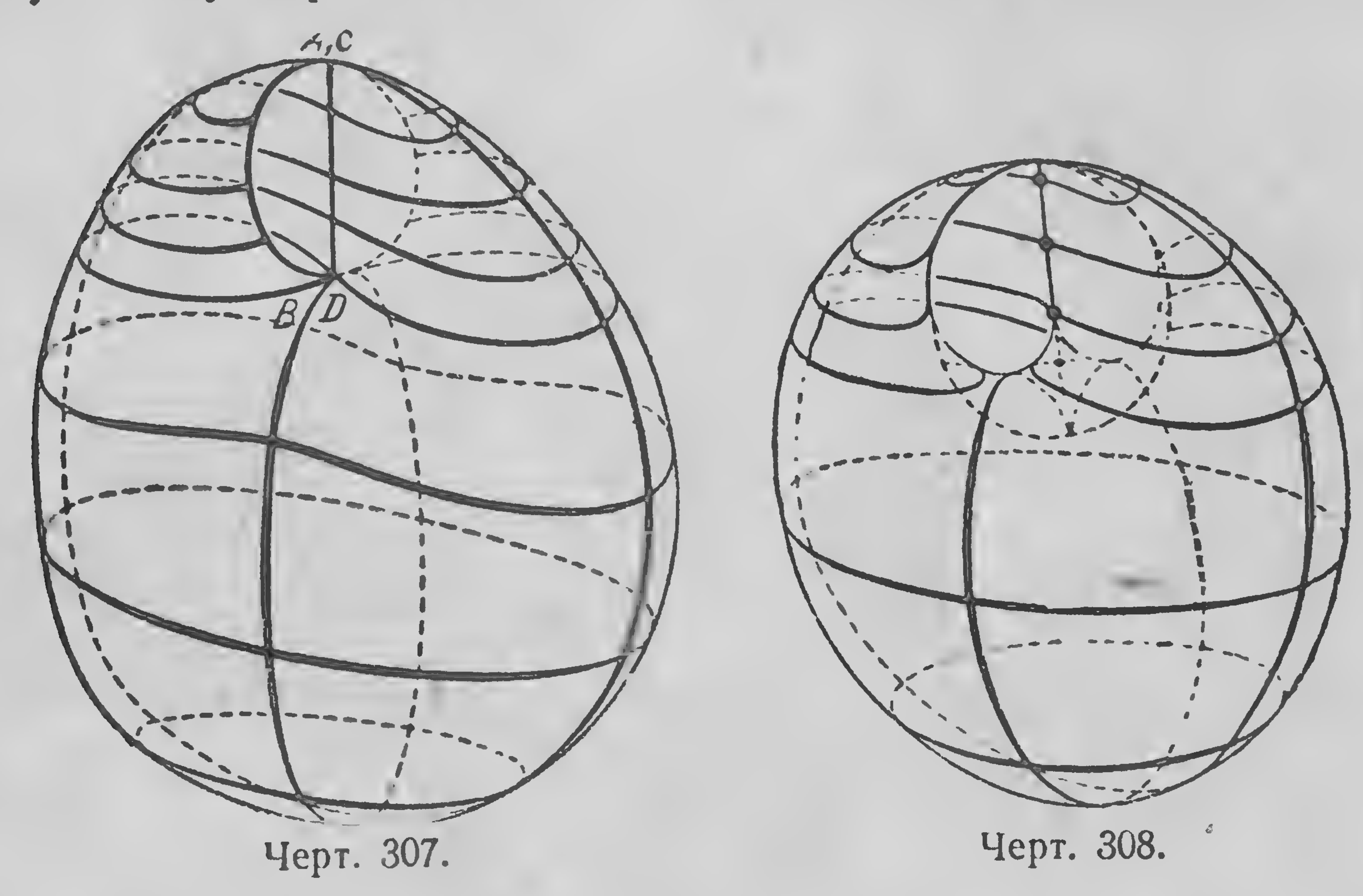
Черт. 306а.



Черт. 306б.

топологически эквивалентную с мебиусовой поверхностью. При этом мы применили тот же способ склеивания границ, при помощи которого поверхность Мебиуса по определению получается из квадрата. Граница новой поверхности получается из дуг DA и BC. Но так как точка A совпадает с точкой C, а точка B с точкой D, то из этих дуг получается замкнутая кривая, которой мы можем придать, например, форму окружности (черт. 307). Очевидно, эта поверхность не имеет самопересечений. В двух точках, получающихся из точек A, C и B, D, поверх-

ность искривлена не непрерывно; однако путем дальнейшей деформации окрестностей этих точек мы получаем поверхность, непрерывно искривленную всюду. Черт. 308 и 309 дают представление об этой поверхности



Черт. 307.

Черт. 308.

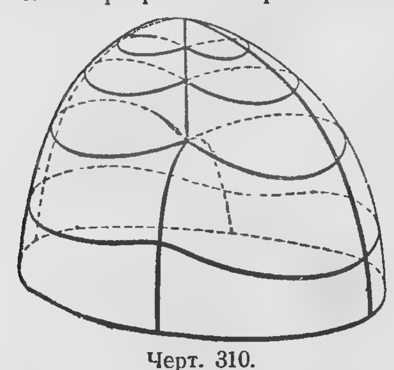
Несмотря на круговую границу, эта поверхность не может служить сосудом. В самом деле, так как она односторонняя, она не отделяет внутренности сосуда от внешнего пространства. Если замкнуть поверхность путем добавления круга, то мы вновь получим модель проективной плоскости. В этом можно убедиться, рассматривая черт. 307 и 305. Следовательно, мы получим опять модель мебиусовой поверхности, если вырежем круг из модели проективной плоскости. При этом безразлично, в каком месте поверхности, изображенной на черт. 305, мы вырежем дыру, ибо на проективной плоскости никакое место не выделяется по сравнению с другими, так как на шаре никакая пара диаметрально противоположных точек не отличается от других пар. Особенно наглядный вид получает оставшаяся часть поверхности, если удалить нижнюю часть фигуры, изображенную на черт. 305. Тогда получается поверхность, изображенная на черт. 310, называемая «скрещенным колпаком» (Kreuzhaube). Скрещенный колпак представляет новую модель мебиусовой поверхности, имеющую круговую границу.



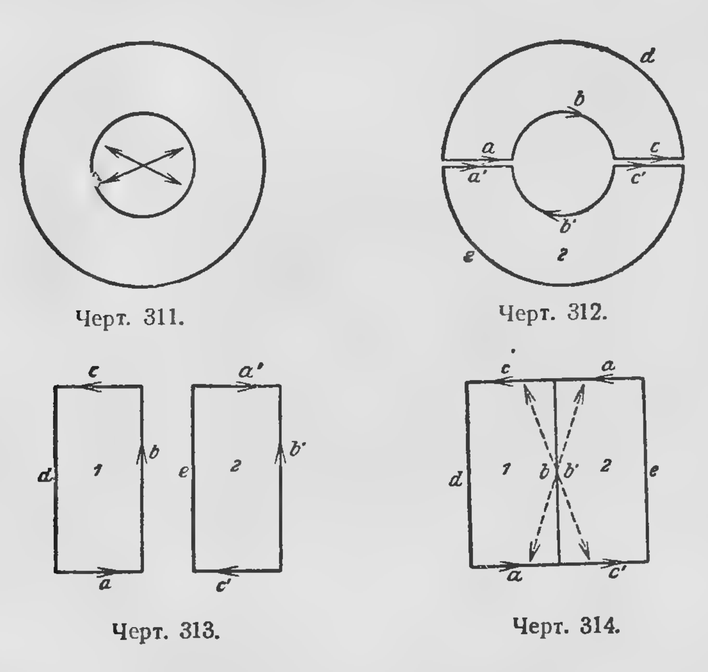
Черт. 309.

Несмотря на односторонность, скрещенный колпак, очевидно, может служить крышкой сосуда. Это возможно потому, что эта поверхность обладает линией самопересечения.

Если разрезать скрещенный колпак вдоль линии самопересечения, то можно получить путем соответствующей деформации круг с четырехугольной или круглой дырой; в самом деле, мы просто в обратном порядке проделываем построение, изображенное на черт. 303—305. Следовательно, мы получим модель мебиусовой поверхности, если будем исходить из плоской области, заключенной между двумя концентрическими окружностями, и отождествим все пары диаметрально противоположных точек внутренней окружности (черт. 311). С первого взгляда никак нельзя заметить, что получившаяся фигура представляет ту же самую поверхность, что и квадратная модель таблицы на стр. 270. Однако можно получить квадратную модель из этой, если последнюю разрезать (черт. 312), деформировать получившиеся части



Черт. 310.



Черт. 311.

Черт. 312.

Черт. 313.

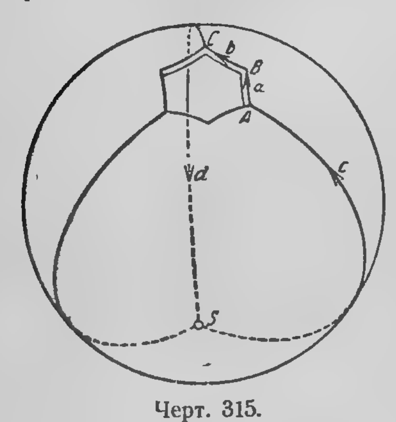
Черт. 314.

(черт. 313) и, перевернув одну часть вокруг прямой b', частично склеить границы, а частично привести их в соответствие (черт. 314).

Наша модель проективной плоскости имеет две особых точки, а именно две конечных точки линии самопересечения. Бой (Boy) построил другую

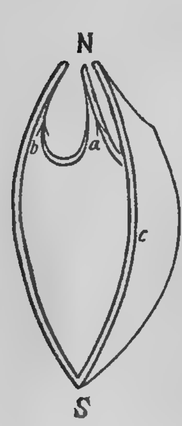
модель проективной плоскости, которая не имеет особых точек и искривлена всюду непрерывно.

Чтобы получить поверхность Бойя, нужно исходить не из квадрата, а из правильного шестиугольника, диаметрально противоположные точки границы которого опять-таки следует отождествлять. Путем деформации мы получим шаровую поверхность, из которой вырезан правильный шестиугольник со сторонами, образованными дугами кругов. Эту фигуру, так же как и шестиугольник, можно разбить на три конгруэнтные части, расположенные симметрично вокруг некоторой оси (черт. 315). Вырежем одну из этих частей и будем деформировать ее дальше. Эту деформацию, которая будет описана ниже, применим затем к оставшимся двум частям поверхности, и таким образом получим три новых конгруэнтных куска поверхности. Складывая их, получим в конечном итоге поверхность Бойя. Эта поверхность обладает также трехкратной осью симметрии. Нашей целью является совмещение противоположных точек границы шестиугольника, вырезанного из поверхности шара.

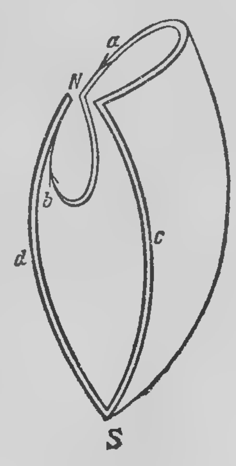


Черт. 315.

Итак, представим себе кусок поверхности $ScAaBbCdS$ (черт. 315) и прежде всего приведем к совпадению в точке N три точки A, B, C (черт. 316), не отождествляя их однако, ибо это не соответствовало бы закону отождествления точек границы, из которого мы исходим. Закрепим теперь точки S и N и стороны b, c и d, вывернув кверху замкнутую сторону a (черт. 317) так, что она займет положение, изображенное на черт. 318. Часть поверхности, заключенную между сторонами c и a, придется при этом сильно растянуть так, что она станет почти плоской. Повернем теперь петлю b направо вверх (черт. 318) так, чтобы она подошла снизу к вышеупомянутой части поверхности и заняла положение, изображенное на черт. 319. В этом окончательном расположении дуги c и d должны быть конгруэнтны друг другу, петли a и b также конгруэнтны друг другу, так что при поворачивании нашей фигуры вокруг оси SN в направлении, указанном стрелкой, на угол $\frac{2\pi}{3}$ c должна совпасть с d, а b с a (черт. 319). Представим себе теперь, что мы

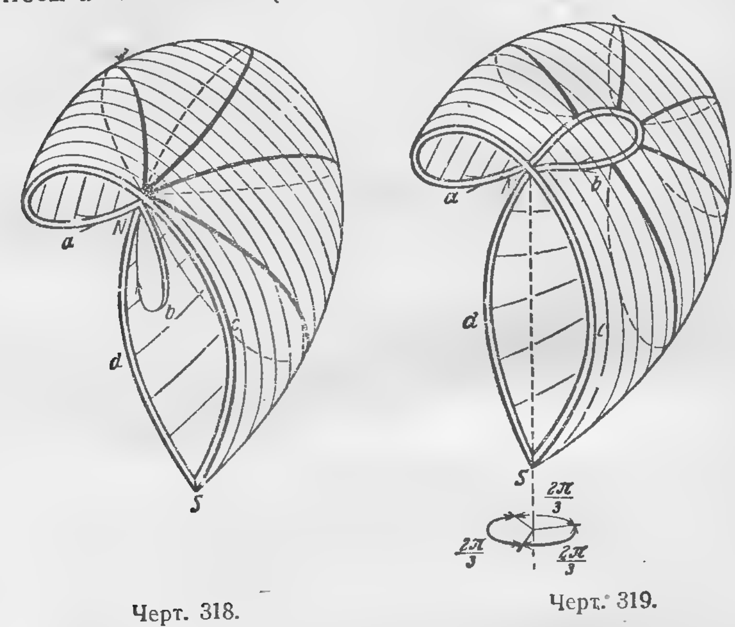


Черт. 316.



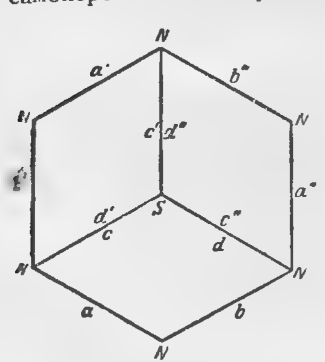
Черт. 317.

приготовили второй конгруэнтный экземпляр такого же куска поверхности, причем соответствующие части обозначим соответствующими буквами a', S' и т. д. Наложим этот экземпляр на первый таким образом, чтобы d' совпала с c (и именно так, чтобы точка S' совпала с точ-



Черт. 318. Черт. 319.

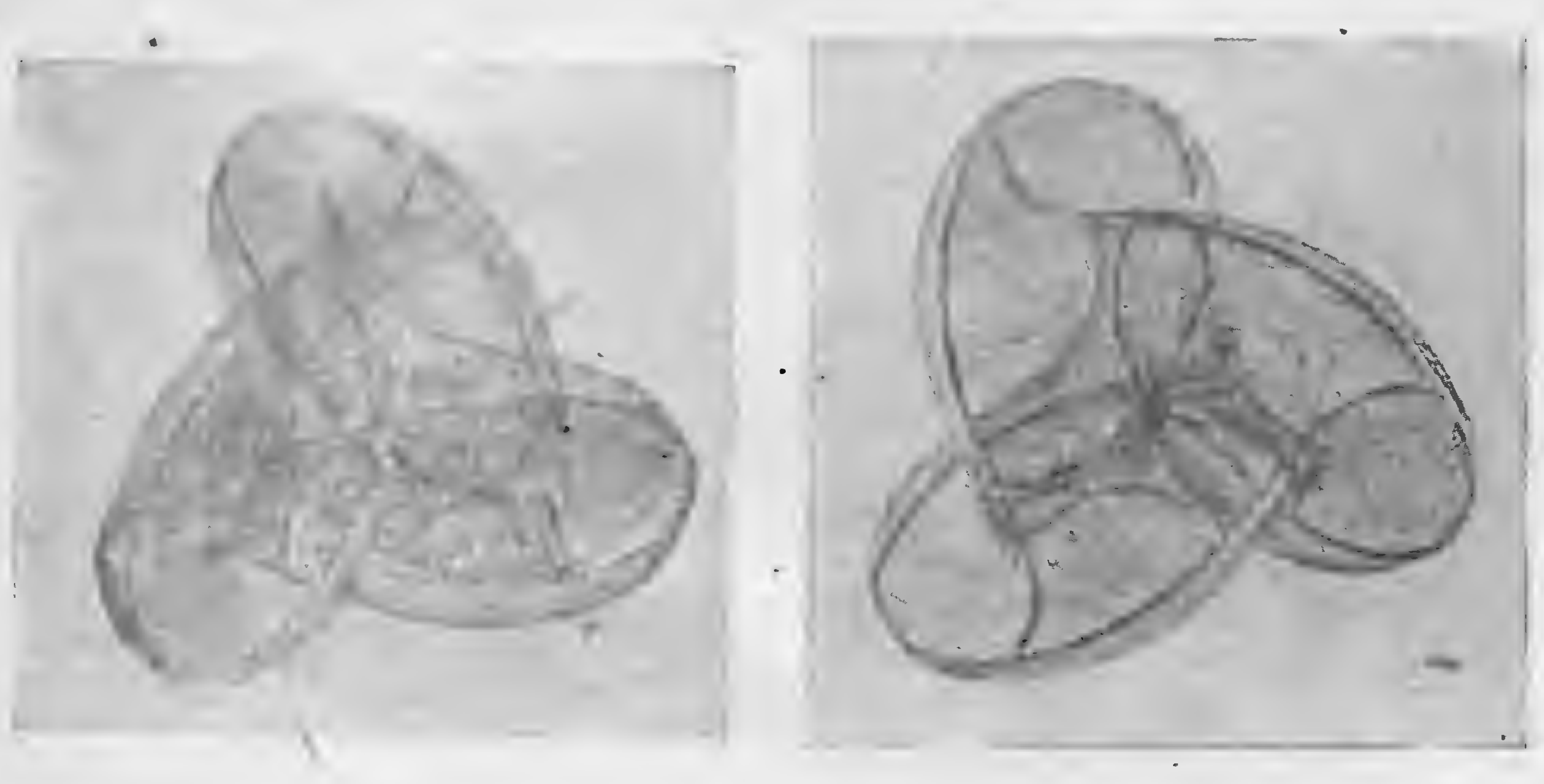
кой S, а точка N' с точкой N). Тогда дуга a' должна совпасть с дугой b. Сложим обе эти границы вместе. Кривая Nb превратится в кривую самопересечения получившейся поверхности, как это видно на черт. 319. Граница поверхности теперь состоит из дуг c', a, b', d. В этом легко убедиться, если снова обратиться к шестиугольнику, от которого мы исходили (черт. 320). Очевидно, к этой границе можно приложить третий экземпляр таким образом, чтобы (применяя соответствующие обозначения) дуга d совпала с дугой c'', a с b'', b' с a'' и c' с d''. Таким образом, мы построили поверхность Бойя. На черт. 320 видно, что поверхность Бойя эквивалентна проективной плоскости. Модель такой поверхности, сделанная из проволочной сетки, изображена на черт. 321. Кривая самопересечения поверхности Бойя состоит из трех петель, проходящих через точку



Черт. 320.

N и так же, как и вся поверхность, симметричных относительно оси SN. Более детальное рассмотрение черт. 320 показывает, что через точку N проходят три полости поверхности. Для того чтобы эти три полости имели в точке N непрерывную касательную плоскость, необхо-

димо и достаточно, чтобы шесть концов петель, сходящихся в точке N, имели в этой точке три попарно перпендикулярных касательных. Если в остальных швах имеется не непрерывное изменение кривизны или изломы, то их можно устранить простым разглаживанием. На модели,



Черт. 321а. Черт. 321б.

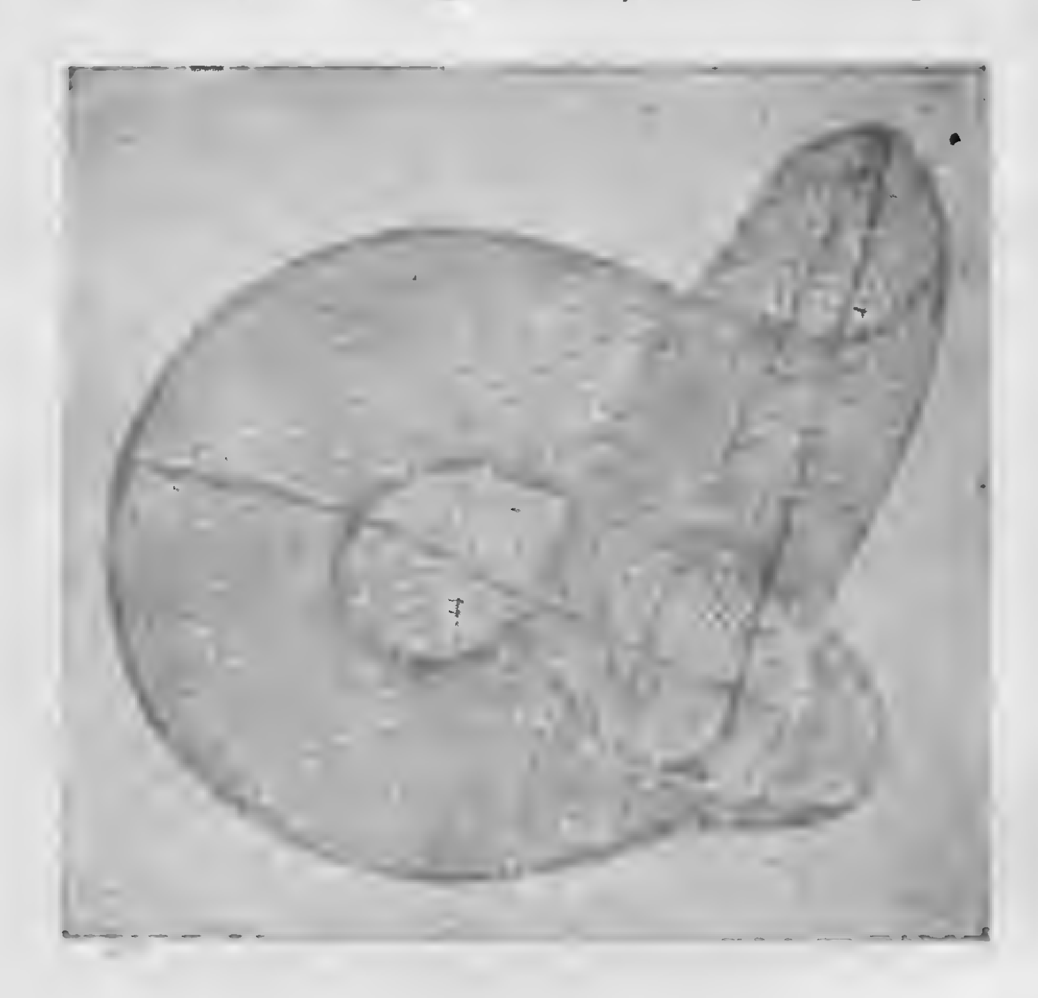
изображенной на черт. 321, кривая самопересечения сделана из более толстой проволоки. Другие толстые проволоки служат только для жесткости; закрепляющий винт помещен в точке S. Связь этой модели с нашим построением особенно наглядно выступает на черт. 321б.



Черт. 321в.

В соответствии с этим поверхность Бойя имеет всюду непрерывное сферическое изображение. К сожалению, до сих пор не выяснено, каким образом это изображение простирается на шаре. Если при этом мы будем исходить от произвольного нормального вектора и будем непрерывно строить изображение, то вследствие односторонности поверхности Бойя мы заведомо придем к противоположно направленному нормальному вектору в той же точке. Таким образом всякой точке поверхности при сферическом отображении соответствует пара диаметрально противоположных точек шара. Но так как при таком отождествлении шар снова переходит в проективную плоскость, то сферическое отображение поверхности Бойя

дает отображение проективной плоскости на самое себя, которое, конечно, не взаимно однозначно, так как паре точек шара, очевидно, соответствует несколько точек поверхности Бойя.



Черт. 321г.

48. Нормальные формы поверхностей конечной связности. Будем относить к одному и тому же классу поверхностей все поверхности, которые могут быть топологически отображены одна на другую. Для того чтобы две поверхности конечной связности принадлежали к одному и тому же классу, необходимы следующие условия:

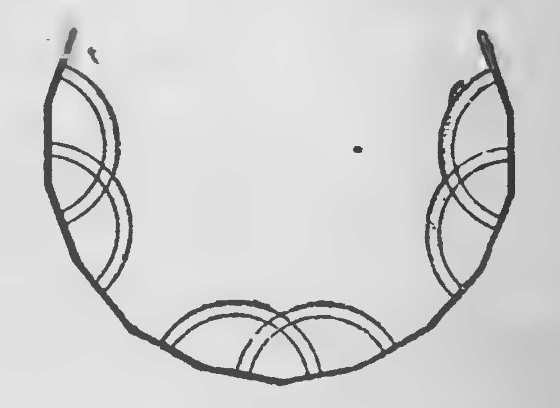
1) обе поверхности должны быть либо замкнуты, либо иметь одинаковое число граничных кривых;

2) поверхности должны быть либо обе ориентируемы, либо обе неориентируемы;

3) обе поверхности должны иметь одинаковую связность.

Необходимость первого условия очевидна. Второе условие можно выразить еще так: всякая поверхность F, которая может быть топологически отображена на ориентируемую поверхность G, также ориентируема. В такой форме это утверждение легко доказать. В самом деле, ориентация поверхности G приводит при топологическом отображении к ориентации поверхности F.

Точно так же легко убедиться в необходимости третьего условия: связность обусловливает существование системы разрезов, которая при топологическом отображении переходит в систему разрезов одинаковой структуры на другой поверхности.



Черт. 322.

Более подробное рассмотрение показывает, что названные три условия для возможности топологического отображения двух поверхностей также и достаточны. Именно, если относительно некоторой поверхности известно, ориентируема она или нет, и если известны число ее краевых кривых и связность, то всегда можно применить способ, подобный тому, который мы применяли для тора и для ориентируемых замкнутых поверхностей со связностью 5 и 7 (черт. 282—287, стр. 261—263). При помощи соответствующей системы разрезов поверхность может быть превращена в многоугольную область, границы которой целиком или частично отождествлены, причем как структура системы разрезов, так и число граничных кривых и способ склеивания границ многоугольника полностью определены указанными тремя условиями. Следовательно, если две поверхности имеют одни и те же данные, то они могут быть топологи-

чески отображены на одну и ту же многоугольную область и, следовательно, друг на друга.

Ориентируемые замкнутые поверхности рода p согласно этому способу приводят к $4p$-угольнику, склеивание сторон которого изображено на черт. 322. Эти $4p$-угольники дают нам ряд нормальных типов всех ориентируемых замкнутых поверхностей. В самом деле, всякая подобная поверхность имеет нечетную связность $h=2p+1$. Другой полный ряд нормальных типов образуют шар, тор и кренделевидные поверхности с p дырами.

Римановы поверхности теории функций частично содержатся в этом подразделении, хотя их вид не дает возможности предполагать это. Это поверхности, которые подобно сферическому изображению большинства минимальных поверхностей можно наложить на шар в несколько слоев, причем эти слои в точках ветвления связаны друг с другом. Все эти поверхности ориентируемы, так как ориентация поверхности шара может быть перенесена на риманову поверхность, наложенную на шар. Замкнутые поверхности получаются тогда и только тогда, если исходить от алгебраических функций, в то время как трансцендентные функции всегда приводят к незамкнутым поверхностям. Мы не будем на этом подробно останавливаться, так как существует много хороших книг по геометрической теории функций.

Для поверхностей с границей можно также подобрать ряд многоугольников так, что всякая поверхность с конечным числом граничных кривых и конечной связности будет отображаться топологически на один и только один из этих многоугольников. Квадратные модели плоского кругового кольца и мебиусовой поверхности могут служить примерами подобных многоугольников. Для ориентируемых поверхностей с границами можно получить еще более наглядные нормальные формы, если вырезать в шаре, торе или кренделевидной поверхности некоторое число дыр (черт. 278). Чтобы получить и для неориентируемых поверхностей подобные же формы, можно исходить от скрещенного колпака, который мы построили как модель мебиусовой поверхности (стр. 275). Для этого вырежем в шаре определенное число дыр и закроем некоторые из них скрещенными колпаками. Всякая неориентируемая поверхность конечной связности эквивалентна одной из таких поверхностей. Число скрещенных колпаков и открытых дыр однозначно определяется числом граничных кривых и связностью.

Скрещенный колпак имеет одну кривую самопересечения и две особых точки. Односторонние поверхности без особых точек мы уже встречали в виде бутылки Клейна и поверхности Бойя. Все другие неориентируемые замкнутые поверхности могут быть осуществлены без особенностей, если к поверхности Клейна, или к поверхности Бойя, присоединить подходящее число ручек. Но никогда подобная поверхность не может быть осуществлена без самопересечений, как об этом уже упоминалось выше.

Однако в четырехмерном пространстве все неориентируемые поверхности могут быть представлены без особенностей и без самопересечений. В этом пространстве — мы будем обозначать его через R_4, в то время как трехмерное пространство будем обозначать через R_3, — следует представлять себе R_3 так же расположенным, как и плоскость в R_3. Прежде

всего построим в R_4 модель скрещенного колпака, свободную от самопересечений и от особенностей. Для этого представим себе некоторый скрещенный колпак в R_3, причем R_3 расположено в R_4. Удалим из R_3 круг e, имеющий диаметром отрезок самопересечения (черт. 307, стр. 275). В пространстве R_3 мы можем, закрепив окружность круга, так выпучить внутренность круга, что ни одна внутренняя точка деформированной поверхности не будет лежать в плоскости окружности. Таким же образом мы можем теперь в пространстве R_4 внутренность круга e деформировать в такую поверхность f, что граница этой поверхности не отрывается от скрещенного колпака пространства R_3, между тем как внутренность поверхности f целиком выпячивается из пространства R_3. При такой деформации скрещенный колпак перейдет в некоторую поверхность F пространства R_4, которая, очевидно, не имеет ни самопересечений, ни особенностей. Если мы теперь поместим в пространство R_4 шар с некоторым числом дыр и некоторые из этих дыр закроем не скрещенными колпаками, а поверхностями, подобными F, то получим свободные от особенностей и самопересечений нормальные формы для всех неориентируемых поверхностей конечной связности.

Другая проблема состоит в том, чтобы представить поверхностей заданной структуры алгебраическими уравнениями возможно более низкой степени. Так, мы упоминали уже о поверхности Штейнера как модели проективной плоскости. Существуют ли алгебраические поверхности вида поверхности Бойя, еще неизвестно. В пространстве R_4 проективную плоскость можно осуществить без самопересечений и особенностей при помощи очень простых уравнений. Этот вопрос будет описан в добавлении к настоящей главе.

Вопрос о топологической эквивалентности переносится с поверхностей на образы трех и большего числа измерений. При этом мы приходим к *группам Бетти*, в теории которых связность и ориентируемость поверхности рассматривается с гораздо более общей точки зрения. Сравните изложенное, например, с упомянутой на стр. 252 книгой П. С. Александрова.

49. Топологическое отображение поверхности на себя. Неподвижные точки. Классы отображений. Универсальная поверхность наложения тора. Простейшее топологическое отображение некоторого образа на самое себя состоит в том, что этот образ как целое непрерывно деформируется в самом себе. Подобное отображение мы будем называть деформацией. Движения плоскости в самой себе суть деформации. Наоборот, зеркальное отражение плоскости относительно прямой дает пример топологического отображения, не представляющего деформации. В самом деле, при зеркальном отражении направление обхода всякого круга изменяется на обратное, между тем как деформация оставляет направление обхода неизменным.

Точка, которая отображается на самое себя, называется неподвижной точкой отображения. Мы теперь докажем, что всякое непрерывное отображение круга на себя должно обладать по крайней мере одной неподвижной точкой; при этом точки окружности мы также причисляем к кругу. Допустим, в противоположность нашему утверждению, что существует непрерывное отображение круга e на себя, не имеющее не-

подвижных точек. Тогда мы можем во всякой точке P круга e начертить стрелку, направленную из точки P в ее образ; такое построение нельзя было бы осуществить только в неподвижных точках. Вследствие предположенной непрерывности отображений направление стрелки должно меняться непрерывно от точки к точке. Рассмотрим теперь стрелку в какой-нибудь точке окружности, и пусть эта точка один раз пробегает окружность в направлении часовой стрелки; при этом и касательная в этой точке также повернется один раз в направлении вращения часовой стрелки. Мы утверждаем, что и направление стрелки в этой точке точно так же повернется один раз в направлении часовой стрелки. В самом деле, угол между стрелкой и касательной всегда отличен от нуля или от некоторого кратного π, так как стрелка в точках окружности всегда направлена внутрь круга и никогда не направлена по касательной. Но если бы при одном повороте точки по окружности число оборотов стрелки отличалось от числа оборотов касательной, то по крайней мере однажды должно было бы случиться, чтобы на окружности оба направления совпали или были прямо противоположны. Аналогичным образом мы рассмотрим число оборотов стрелки для какой-нибудь окружности k, концентричной с окружностью нашего круга и расположенной внутри круга. И в этом случае стрелка должна один раз повернуться в направлении вращения часовой стрелки, если начальный конец стрелки, взятый на окружности, пробегает окружность один раз в направлении вращения часовой стрелки; в самом деле, в противном случае число оборотов стрелки должно было бы где-то измениться скачкообразно при непрерывном сокращении окружности взятого круга до концентрической окружности k, а это противоречило бы непрерывности распределения стрелок внутри круга. В то же время, если мы будем непрерывно стягивать окружность k к центру M круга, то направление стрелки во всех точках окружности k должно все меньше отличаться от одного определенного направления, а именно, направления стрелки в точке M. Таким образом число оборотов для достаточно малых окружностей должно было быть равно нулю. Итак, мы пришли к противоречию. Следовательно, не существует непрерывного отображения круга на самое себя без неподвижных точек.

Подобным же образом можно показать, что при всяком непрерывном отображении сферы на себя либо должна быть неподвижная точка, либо точка, которая переходит в диаметрально противоположную точку. В противном случае для всякой точки можно было бы однозначно определить дугу большого круга, соединяющую эту точку с ее образом. Таким способом мы получили бы всюду непрерывное поле стрелок на поверхности шара и, рассматривая число оборотов, можно было бы доказать, что подобное поле невозможно. Это показывает, что на земле невозможно всюду установить указатели путей, направления которых непрерывно изменялись бы от одного места к другому.

Принимая сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками за модель проективной плоскости, можно отсюда получить следствие, что всякое непрерывное отображение проективной плоскости на себя обладает неподвижной точкой.

Для того чтобы лучше обозреть топологические отображения заданной

поверхности на себя, можно разбить совокупность отображений на классы. Будем считать два отображения принадлежащими к одному и тому же классу, если они отличаются друг от друга только одной деформацией; деформации образуют класс тождественных преобразований. На сфере можно получить отображение, не принадлежащее к этому классу, если отобразить всякую точку в диаметрально противоположную ей точку; в самом деле, очевидно, что при таком отображении направление обхода для малых кругов меняется на обратное. Таким образом мы нашли два класса отображений для сферы. Более подробное рассмотрение, которое нас завело бы слишком далеко, показывает, что на шаре нет других классов отображений. Поэтому все топологические отображения проективной плоскости суть деформации.

Наоборот, на торе существует бесконечно много классов. Для того чтобы рассмотреть некоторые из этих классов, представим себе, что тор разрезан вдоль одного из меридианов и превращен в круговой цилиндр с двумя краевыми окружностями. Закрепим неподвижно одну окружность и станем закручивать цилиндр вокруг самого себя так, чтобы вторая окружность сделала k оборотов; всякая прямолинейная образующая цилиндра при этом обратится в винтовую линию, обходящую ось цилиндра k раз. Если мы теперь снова склеим оба края, то получим топологическое отображение тора на самое себя. При этом все точки склеенных окружностей будут неподвижными точками, а во всех остальных точках отображение получается из отображения кругового цилиндра. Образующие цилиндра соответствуют параллелям тора, и если определить дополнительно соответствие обеих поверхностей также и для частей пространства, заключенных внутри них, то можно ось цилиндра поставить в соответствие с «осью» тора, т. е. с траекторией центра окружности, вращением которой образуется тор. При отображении тора, которое мы получили, параллели тора превратились в такие замкнутые кривые на торе, которые обходят винтообразно ось тора k раз. Для такой кривой число k не может измениться при деформации тора. Поэтому два отображения тора, для которых значения k различны, никогда не могут принадлежать к одному и тому же классу.

Однако было бы неправильным, если бы мы захотели воспользоваться аналогичным способом для доказательства существования бесконечно большого числа классов отображений на бутылке Клейна. Винтообразным кривым на поверхности цилиндра соответствуют на бутылке Клейна замкнутые кривые, которые могут быть деформированы одна в другую и при различных значениях k. Разницу, которая в этом отношении существует между тором и бутылкой Клейна, можно уяснить на квадратных моделях. На бутылке Клейна имеется лишь конечное число классов отображений.

В случае тора наш способ отнюдь не исчерпывает всех классов отображений. Полное обозрение всех отображений становится возможным для тора лишь при помощи универсальной поверхности наложения тора. Для того чтобы представить себе эту поверхность, вообразим, что эвклидова плоскость навивается на бесконечно длинный круговой цилиндр, который при этом, конечно, бесконечно много раз обертывается плоскостью. Мы уже неоднократно превращали обрезанный с двух сторон

цилиндр в тор. Точно так же можно превратить в тор бесконечно длинный цилиндр, причем ось цилиндра перейдет в «ось» тора, которую ось цилиндра будет описывать бесконечно много раз; цилиндр же будет бесконечное число раз покрывать самого себя. Эвклидова плоскость при нашем способе отобразится топологически на поверхность, покрывающую тор бесконечным числом слоев без складок и без точек ветвления. Эта поверхность и есть универсальная поверхность наложения тора.

Каждый оборот меридиана или параллели тора ведет от одного слоя поверхности к другому. Проведем на торе каноническую систему разрезов (один меридиан и одну параллель), которая обычным способом превратит тор в прямоугольник с отождествленными противоположными сторонами. Если теперь отметить на поверхности наложения все точки, расположенные на кривых системы разрезов, и превратить поверхность наложения, обратно, в плоскость, то отмеченные точки покроют на плоскости систему прямых, разбивающую плоскость на бесконечное множество прямоугольных полей, причем эти поля расположены так же, как фундаментальные области плоской кристаллографической группы переносов (черт. 72, стр. 70). Каждое поле соответствует одному слою поверхности наложения. Для того чтобы убедиться в этом, мы построим универсальную поверхность наложения тора еще другим способом. Представим себе тор как квадрат с отождествленными противоположными сторонами. Так же как при построении плоской квадратичной точечной решетки (стр. 36), образуем из подобных квадратов плоскую, бесконечно протяженную в обе стороны полосу S, ограниченную двумя параллельными прямыми a и b. Полоса S превратится в бесконечно длинный круговой цилиндр C, если мы путем соответствующего изгибания этой полосы совместим прямые a и b. Квадраты, из которых образована полоса S, разбивают цилиндр C на поля, ограниченные окружностями. Мы вновь получим тор, если отождествим две окружности, ограничивающие цилиндрическое поле. Если описанным выше способом наложим цилиндр на тор, то все эти поля наложатся одно на другое, причем каждое поле покроет тор один раз целиком, а граничные линии расположатся по канонической системе разрезов тора. Теперь применим к нашей полосе S такой же способ, какой мы применяли при построении квадратной решетки: составим всю плоскость из подобных полос. Если мы затем наложим плоскость бесконечное число раз на цилиндр C так, чтобы опять полоса S перешла в цилиндр C, то, очевидно, все полосы наложатся на полосу S и деление на квадраты каждой полосы совпадет с делением полосы S. Если теперь опять накрутим цилиндр C на тор, то все квадраты плоскости наложатся друг на друга, а их границы будут расположены по канонической системе разрезов тора, как мы и утверждали.

Это второе построение дает нам возможность получить особенно простое отображение универсальной поверхности наложения U тора на плоскость E. Именно если считать эквивалентными все точки поверхности U, расположенные на одной и той же точке тора, то в плоскости E всякая система эквивалентных точек поверхности U представится квадратной точечной решеткой. Назовем теперь *фундаментальной группой* (f) тора группу всех топологических отображений поверхности U на себя, которые переводят всякую точку в эквивалентную ей. Тогда, очевидно,

группа (f) при отображении $U \to E$ перейдет в группу переносов, которая переводит квадратную решетку в себя.

Пусть теперь g — какое-нибудь другое топологическое отображение поверхности U на себя, которое переводит, правда, не всякую точку в эквивалентную ей, но всегда переводит эквивалентные точки в эквивалентные же. Тогда отображение g соответствует определенному топологическому отображению h тора на себя. Именно, всякая точка P тора покрыта системой бесконечного множества эквивалентных точек (Q) поверхности U. Все образы (Q') точки Q по определению g покрывают одну и ту же точку тора P'. Таким образом отображение g определяет отображение $P \to P'$, и это топологическое отображение тора на себя мы называем h. Можно показать, обратно, что для каждого заданного отображения h тора можно найти отображение g поверхности наложения, которое находится в этом соотношении с отображением h. Тогда g определено только с точностью до произвольного отображения из фундаментальной группы (f).

Таким способом мы можем теперь полностью обозреть все классы отображений тора. Мы приведем это следствие здесь без подробного обоснования; отображение g при этом заменяется отображением γ в плоскости E, в которое g переходит при отображении $U \to E$. Пусть теперь $ABCD$ квадратная фундаментальная область группы переносных движений (t) в плоскости E, которая соответствует группе (f). Пусть $A'B'C'D'$ есть образ квадрата $ABCD$ при отображении γ. Тогда $A'B'C'D'$ также должны образовать основной параллелограм группы (t). Отображение тора h тогда и только тогда представляет деформацию, когда $ABCD$ может быть приведена переносным движением в $A'B'C'D'$. Остальные классы отображений тора соответствуют другим формам, которые может иметь образующий параллелограм решетки (черт. 39, стр. 36), а также вращениям и зеркальным отображениям квадрата $ABCD$ в самое себя[1]).

Понятие универсальной поверхности наложения может быть определено для всех поверхностей. Для замкнутых ориентируемых поверхностей можно получить универсальные поверхности наложения, если прикладывать $4p$-угольники таким же образом, как мы это делали с квадратами для тора. Однако для случая $p > 1$ уже нельзя наглядно представить фундаментальную группу при помощи эвклидовой группы переносных движений. Но можно представить фундаментальную группу при помощи гиперболической группы смещений, а $4p$-угольники — при помощи ее фундаментальных областей (черт. 249, стр. 227, и черт 286, стр. 262, для случая $p = 2$). В случае поверхностей с границей мы приходим к группам переносов или смещений с незамкнутой фундаментальной областью. Для неориентируемых поверхностей необходимо при метрическом осуществлении фундаментальной группы добавить также эвклидовы и гиперболические зеркальные преобразования к переносным движениям и сдвигам.

---

[1]) Если определить решетку как совокупность точек с целочисленными координатами в декартовой системе и если привести точку A' при помощи переносного движения в совпадение с началом координат, то параллелограм $A'B'C'D'$ определяется координатами a, b точки B и координатами c, d точки C. Чтобы охарактеризовать все классы отображений тора, необходимо подставлять вместо a, b, c, d все целые числа, удовлетворяющие условию $ad - bc = \pm 1$.

50. Конформное отображение тора. В § 39 мы поставили вопрос о том, можно ли некоторую поверхность конформно отобразить на самое себя или на другую поверхность и сколькими способами можно осуществить такое отображение. Там мы ограничивались такими поверхностями, которые топологически эквивалентны кругу, или сфере, или внутренности круга. Понятие универсальной налагающейся поверхности позволяет рассмотреть этот вопрос и для всех других поверхностей. Мы ограничимся тем, что будем искать все конформные отображения тора на другой тор или на тот же самый. Для других поверхностей мы можем достигнуть цели при помощи тех же методов, как и в случае тора, но в случае тора эти методы оказываются более наглядными. Здесь и далее мы будем называть тором не только поверхность вращения, образованную окружностью, вращающейся вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но не пересекающей ее, но и всякую поверхность, топологически эквивалентную этой.

Согласно дизъюнкции, упомянутой в § 39, всякая поверхность, топологически соответствующая внутренности круга, или, что то же самое, эвклидовой плоскости, может быть конформно отображена либо на гиперболическую, либо на эвклидову плоскость. Эту теорему мы можем применить к универсальной поверхности наложения U тора T, так как эта поверхность удовлетворяет условиям теоремы. Пусть, таким образом, поверхность U конформно отображена на плоскость E, причем мы оставляем сначала открытым вопрос о том, является ли E эвклидовой или гиперболической плоскостью.

Фундаментальная группа (f) есть группа *конформных* отображений поверхности U на себя, так как эти отображения преобразуют всякую частичную область поверхности U в конгруэнтную область. Таким образом группе (f) при конформном отображении $U \to E$ должна соответствовать группа (t) конформных отображений плоскости E. Но все конформные отображения плоскости E на себя известны. Это — гиперболические движения в случае, если E — гиперболическая плоскость, и эвклидовы движения и преобразования подобия, если E — эвклидова плоскость (стр. 231). Кроме того, относительно группы (t) известно, что она имеет определенное сходство с эвклидовой кристаллографической группой переносов; в самом деле, за исключением тождественного преобразования все отображения группы (t) не имеют неподвижных точек, и группа обладает четырехугольной фундаментальной областью. Если бы E была гиперболической плоскостью, то группа (t) должна была бы быть дискретной группой сдвигов с конечной фундаментальной областью, а мы уже выяснили ранее, что фундаментальные области этих групп имеют по крайней мере восемь вершин. Поэтому остается предположить, что E представляет эвклидову плоскость. Можно очень просто доказать, что всякое эвклидово преобразование подобия, отличное от движения, имеет неподвижную точку. Таким образом группа (t) должна содержать кроме тождественного преобразования только движения, не имеющие неподвижных точек, т. е. переносы. Так как, кроме того, группа (t) дискретна и имеет конечную фундаментальную область, то она должна представлять кристаллографическую группу переносов, рассмотренную нами на стр. 227.

Пусть теперь аналогичное рассмотрение проведено для какого-нибудь другого тора T'; пусть U' универсальная поверхность наложения для T'; пусть фундаментальная группа тора T' при конформном отображении $U' \rightarrow E$ переходит в кристаллографическую группу переносов (t') плоскости E. Мы уже упоминали, что всякое отображение тора на самое себя может быть дополнено до отображения налагающейся поверхности. Точно так же для всякого конформного отображения $T \rightarrow T'$ можно определить конформное отображение $U \rightarrow U'$ так, что соответствующие точки U и U' всегда будут налагаться на соответствующие точки T и T'. При помощи отображений $U \rightarrow E$ и $U' \rightarrow E$ отображение $U \rightarrow U$ переводится в конформное отображение a плоскости E на себя. Отображение a должно представлять эвклидово движение или преобразование подобия, но, кроме того, оно должно переводить группу переносов (t) в группу (t').

Таким образом мы показали, что тор T только тогда может быть конформно отображен на тор T', когда группы (t) и (t') переводятся одна в другую при помощи преобразования подобия или при движении. Это условие можно выразить в более наглядной форме. Пусть переносное движение t_1 есть кратчайшее среди движений группы (t) и пусть t_2 — опять-таки кратчайшее из переносных движений группы (t), не параллельных переносному движению t_1. Пусть m — отношение длин $\frac{t_2}{t_1}$ и, значит, $m \geqslant 1$; пусть α — угол между этими переносными движениями. Для того чтобы α было однозначно определено, достаточно потребовать, чтобы было $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Подобным же образом можно приписать группе (t') два числа m' и α'. Теперь, для того чтобы группу (t) можно было перевести в группу (t') при помощи преобразования подобия, необходимы и достаточны условия: $m = m'$ и $\alpha = \alpha'$ (простое доказательство этого предоставляем провести читателю). Таким образом мы можем приписать всякому тору T два числа m, α, так что T может быть конформно отображен только на те поверхности тора, для которых оба эти числа имеют то же значение, как для T. Эту пару чисел (или другую пару, которая может быть поставлена во взаимно однозначное соответствие с этой) называют модулями тора.

Для того чтобы было возможно конформное отображение поверхностей двух торов T и T', совпадение модулей не только необходимо, но и достаточно. В самом деле, когда имеется преобразование подобия или движение a плоскости в себе, переводящее группу (t) в группу (t'), тогда, как легко видеть, принадлежащее к a конформное отображение $U \rightarrow U'$ определяет конформное отображение $T \rightarrow T'$; отображение $U \rightarrow U'$ переводит покрывающие друг друга точки поверхности U и только эти точки всегда в покрывающие друг друга точки поверхности U'. Подводя итоги, мы можем сказать, что поверхности тора в смысле конформного отображения образуют семейство с двумя параметрами.

Если пространственный образ тора не имеет никакой особой правильности, то значение обоих модулей нельзя наглядным образом получить из вида тора; если же тор T представляет поверхность вращения, то (t) всегда имеет прямоугольную фундаментальную область и потому следует

положить $a=\frac{\pi}{2}$. В этом случае отображение $U \to E$ может быть задано явно. Оно переводит ортогональную сеть меридианов и параллелей в два ортогональных семейства параллельных прямых на плоскости E. Если в частности T есть поверхность вращения, образованная окружностью, то отношение m сторон прямоугольной фундаментальной области (t) может зависеть только от отношения радиусов меридионального круга и «оси». Поэтому два круговых тора могут в том и только в том случае быть конформно отображены один на другой, если они подобны.

В четырехмерном пространстве можно задать поверхность тора так, что для нее поверхность U может быть отображена на эвклидову плоскость даже с сохранением длин (см. добавление 2).

Теперь легко обозреть все способы конформного отображения некоторого тора T на самое себя. Группа (k) этих отображений должна соответствовать группе (l) движений или преобразований подобия в плоскости E, которые переводят (t) в самое себя. Группа (l), очевидно, охватывает все переносные движения плоскости E в самой себе. Эти движения, вообще говоря, исчерпывают группу (l). Если же группа (t) имеет особенную правильность, например обладает квадратной фундаментальной областью, то группа (l) может содержать также вращения и зеркальные отражения.

Способ, который мы привели для тора, можно перенести также и на все другие классы поверхностей. Однако в большинстве случаев поверхность наложения конформно отображается не на эвклидову плоскость, как в случае тора, а на гиперболическую плоскость; так происходит, например, у всех ориентируемых замкнутых поверхностей рода $p>1$. В этих случаях мы приходим к группам сдвигов, и конформное отображение двух поверхностей зависит от того, могут ли быть соответствующие группы сдвигов переведены друг в друга путем гиперболического движения. Как показывают исследования в гиперболической геометрии, гиперболические группы сдвигов с $4p$-угольной конечной фундаментальной областью определяются $6p-6$ постоянными с точностью до гиперболического движения. Поэтому каждой ориентируемой замкнутой поверхности рода $p>1$ соответствует $6p-6$ модулей.

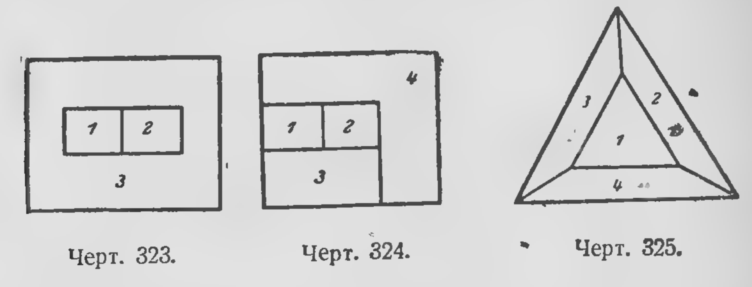
В теории функций этот способ применяется главным образом к римановым поверхностям алгебраических функций. Отображения $U \to E$ в случае $p=1$ приводят к эллиптическим функциям, а в случае $p>1$ — к автоморфным функциям, изученным Клейном и Пуанкаре.

Незамкнутые поверхности приводят к группам с бесконечной фундаментальной областью. В теории функций такие группы встречаются, например, при изучении показательной функции и эллиптических модуль-функций.

51. Задачи о соседних областях, задача о нити и задача о красках. В заключение мы рассмотрим три родственных друг другу вопроса, возникающих при разбиении некоторой поверхности на различные области. Такое разбиение плоскости встречается, например, на политических картах. Далее деление произвольных поверхностей на области встречается в комбинаторной топологии, когда кривая поверхность заменяется топологически эквивалентным ей многогранником. Для того

чтобы определить грани многогранника, необходимо разбить кривую поверхность на области.

Задача о соседних областях состоит в том, чтобы определить на некоторой поверхности максимальное число областей так, чтобы всякая область граничила со всякой другой вдоль некоторой кривой [1]). Мы рассмотрим эту задачу сначала на плоскости, причем выберем две области 1 и 2, соприкасающиеся вдоль некоторой кривой. Если мы возьмем третью область так, чтобы она охватывала области 1 и 2 целиком, то мы уже не сможем определить четвертую область так, чтобы она граничила со всеми тремя областями (черт. 323). Если же мы расположим третью область так, как изображено на черт. 324, то легко найти соответствующую четвертую область. Однако, как бы мы ни выбрали



Черт. 323. Черт. 324. Черт. 325.

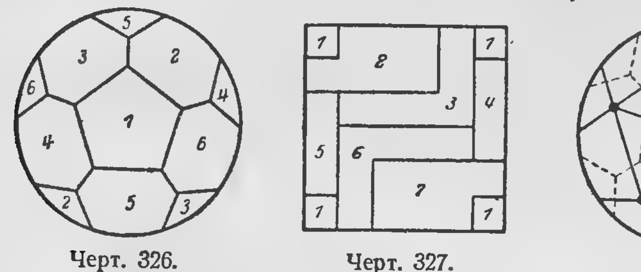
четвертую область, всегда одна из остальных областей будет целиком окружена другими областями так, что уже нельзя найти пятой области, граничащей со всеми остальными четырьмя областями. Наши опыты показывают, что максимальное число соседних областей на плоскости есть 4. Это можно доказать строго. На черт. 325 изображено особо симметричное расположение этих областей.

Задача о нити представляет собой двойственное обращение задач о соседних областях (причем двойственность следует понимать в смысле топологического обобщения пространственного принципа двойственности проективной геометрии). Суть задачи о нити состоит в том, чтобы определить максимальное число точек, расположенных на некоторой поверхности так, что эти точки могут быть соединены кривыми, лежащими на поверхности и не пересекающими друг друга. Простое рассуждение показывает, что максимальное число должно совпадать с максимальным числом соседних областей на той же поверхности. Для доказательства выберем в каждой из соседних областей одну точку. Так как все соседние области граничат вдоль некоторой кривой, то мы можем каждые две точки соединить кривой, лежащей только в двух смежных областях. Получающиеся таким образом кривые мы можем провести так, чтобы отрезки кривых, лежащие в одной и той же области, не пересекались друг с другом; в самом деле, нам нужно только соединять некоторую точку, лежащую внутри области, с определенными точками границы. Таким образом всякое расположение n соседних об-

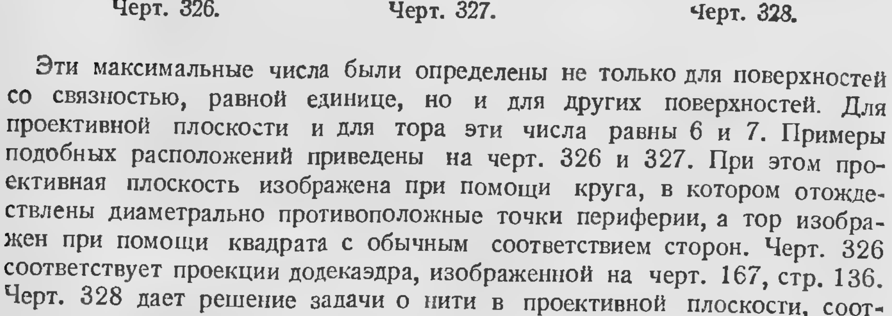
---

[1]) При этом нет необходимости, чтобы области целиком покрывали всю поверхность.

ластей дает одно решение задачи о нити с n точками. Максимальное число точек в задаче о нити поэтому по крайней мере равно максимальному числу соседних областей. Обратно, всякое решение задачи о нити с n точками дает одно расположение n соседних областей. Для этого нужно разбить всякую кривую, соединяющую две точки, на две части и расширить каждую точку вместе с исходящими из нее частями кривых до области на поверхности путем присоединения окружающих эту точку частей поверхности. Тогда мы получим n звездообразных областей, которые всегда граничат друг с другом. Следовательно, максимальное число соседних областей по крайней мере равно максимальному числу точек задачи о нити. Так как мы только что доказали обратное, то отсюда следует, что оба максимальных числа равны.



Черт. 326. Черт. 327. Черт. 328.



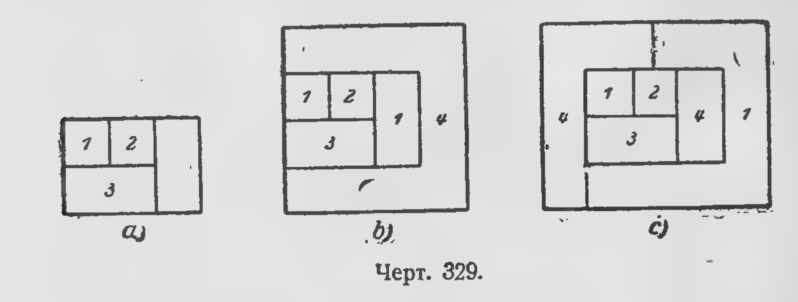
Эти максимальные числа были определены не только для поверхностей со связностью, равной единице, но и для других поверхностей. Для проективной плоскости и для тора эти числа равны 6 и 7. Примеры подобных расположений приведены на черт. 326 и 327. При этом проективная плоскость изображена при помощи круга, в котором отождествлены диаметрально противоположные точки периферии, а тор изображен при помощи квадрата с обычным соответствием сторон. Черт. 326 соответствует проекции додекаэдра, изображенной на черт. 167, стр. 136. Черт. 328 дает решение задачи о нити в проективной плоскости, соответствующее делению на области, изображенному на черт. 326.

В тесной связи с задачей о соседних областях находится задача о красках, которую можно представить в виде задачи практической картографии. Пусть на некоторой поверхности начерчено определенное число областей. Каждая из этих областей выкрашена определенной краской, причем никакие две области, граничащие вдоль некоторой кривой, не выкрашены в одну и ту же краску; если же две области соприкасаются только в одной точке, то они могут быть выкрашены одинаковой краской. Требуется для заданной поверхности определить минимальное число красок, достаточное для подобной раскраски при всяком возможном делении поверхности на области.

Число это во всяком случае должно быть не меньше максимального числа возможных соседних областей на поверхности. В самом деле, для какой-нибудь системы расположения соседних областей необходимо, чтобы каждая область была выкрашена в другую краску. Обратно, напрашивается мысль, что это максимальное число и достаточно. В самом деле, было доказано, что на проективной поверхности достаточно шести

красок, а на торе семи красок для раскраски по нашим правилам при любом выборе областей. Однако подобное же предположение относительно плоскости и шара, а именно, что для этих поверхностей достаточно четырех красок, до сих пор не доказано.

Рассмотрим прежде всего деление на области в плоскости. Три соседних области на черт. 329, *a* необходимо выкрасить тремя различными красками 1, 2, 3. Тогда можно выкрасить четвертую область, граничащую с областями 2 и 3, или краской 4 или краской 1. Если мы выкрасим эту область краской 4, то четырех красок нам нехватит при таком разделении на области, которое изображено на черт. 329, *b*. Таким образом в этом случае нам нужно выкрасить эту область краской 1. Однако при такой раскраске мы наталкиваемся на трудности при деле-



Черт. 329.

нии на области, изображенном на черт. 329, *c*; здесь эта область должна быть выкрашена краской 4. Из этих примеров следует, что окраска первых четырех областей определяется расположением дальнейших областей. При присоединении новой области в зависимости от обстоятельств нам приходится уже закрашенные области вновь перекрашивать; отсюда все трудности этой задачи.

Теперь мы покажем путь, позволяющий нам разрешить задачу о красках для целого ряда замкнутых поверхностей. При этом мы будем деформировать поверхность таким образом, чтобы она превратилась в многогранник, а отдельные области превратились бы в боковые грани многогранника [1]). Очевидно, достаточно разрешить задачу для всех многогранников, имеющих ту же связность, как и заданная поверхность.

Прежде всего докажем следующее: всякий многогранник связности h может быть выкрашен максимум n красками, если число n таково, что для всякого целого числа $F > n$ имеет место неравенство:

$$nF > 6(F + h - 3).$$

Затем мы определим для всякого заданного положительного h минимальное число n_h, обладающее этим свойством. Тем самым будет доказано,

---

[1]) Как показывают примеры, изображенные на черт. 329, такая деформация вообще возможна лишь в том случае, если допускаются также и кривые боковые грани. Для последующего доказательства это несущественно.

что всякая замкнутая поверхность связности h может быть выкрашена при всяком делении на области n_h красками.

Представим себе теперь, что связность h задана вместе с некоторым целым числом n, которое при данной h удовлетворяет заданному условию. Разобьем теперь многогранник связности h на F частей и докажем наше утверждение путем индукции для возрастающего F. Наше утверждение для всякого $F \leqslant n$ тривиально, потому что в этом случае достаточно каждую грань закрасить новой краской. Таким образом наша теорема уже доказана для всякого $F \leqslant F_0$. Теперь мы докажем ее справедливость для $F = F_0 + 1$. Согласно вышесказанному мы можем ограничиться числом $F > n$. По предположению для числа F удовлетворяется неравенство:

$$nF > 6(F + h - 3).$$

Применим теперь теорему Эйлера[1]) о многогранниках:

$$E - K + F = 3 - h$$

или

$$F + h - 3 = K - E.$$

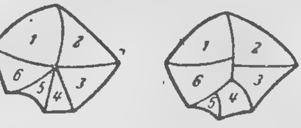
При помощи деформации, при которой число F и связность h остаются неизменными, мы можем достичь того, что во всякой вершине многогранника будут сходиться только три грани и, следовательно, из каждой точки будут выходить только три ребра (черт. 330). Таким образом из всех E вершин выходит всего $3E$ ребер, а так как при этом всякое ребро считается дважды, то $3E = 2K$. Следовательно:

$$6(F + h - 3) = 6K - 6E = 6K - 4K = 2K.$$

Таким образом неравенство, имеющее место в отношении числа n, превратится в

$$nF > 2K.$$

Из этого неравенства можно заключить, что по меньшей мере одна грань многогранника ограничена менее, чем n ребрами. В самом деле, в противном случае все F граней вместе были бы ограничены по меньшей мере nF ребрами, а так как при этом всякое ребро считается дважды, то было бы $nF \leqslant 2K$. Это заключение представляет суть доказательства.



Черт. 330.

Рассмотрим теперь одну из таких граней, которые граничат менее, чем с n соседними гранями. Теперь представим, что внутренняя грань вырезана, а окружающие ее грани так растянуты, что они закрывают образовавшуюся дыру, и таким образом многогранник опять замыкается.

[1]) При установлении этой теоремы мы сделали некоторые предположения относительно расположения боковых граней; эти предположения в данном случае не должны выполняться. Можно, однако, убедиться, что установленное положение применимо и здесь.

Получившийся новый многогранник имеет такую же связность, как и старый, но на одну грань меньше. Следовательно, по предположению он может быть окрашен n красками. Выполним окрашивание, а затем произведем обратную деформацию. Тогда наш многогранник за исключением вырезанной грани выкрашен n красками; но так как эта грань граничит самое большее с $n-1$ соседними гранями, то мы можем и эту грань выкрасить согласно предписанию без применения новой краски. Здесь мы должны были изменять первоначально заданный многогранник так, чтобы в каждой вершине сходились только три ребра. Но мы можем такое изменение произвести в обратном порядке без изменения окраски, так как при этом новых границ не получается.

Теперь посмотрим какие числа n удовлетворяют поставленному условию. Напишем это условие в виде

$$n > 6\left(1+\frac{h-3}{F}\right);$$

здесь следует подставить вместо F все числа, большие n. Если h равно 1 или 2, то правая часть неравенства при возрастании F стремится к 6, оставаясь все время меньше 6. Таким образом в обоих этих случаях $n_6=6$ минимальное целое число, удовлетворяющее нашим предположениям. Для $h=3$ правая часть имеет постоянное значение 6, и, следовательно, $n_6=7$. Для $h>3$ правая часть с возрастанием F уменьшается, и поэтому достаточно принять для F минимальное допустимое значение $n+1$. При этом мы получаем для n в случае $h>3$ неравенство.

$$n > 6\left(1+\frac{h-3}{n+1}\right)$$

или в преобразованном виде:

$$n(n+1) > 6n+6+6h-18,\quad n^2-5n > 6h-12,$$

т. е.

$$n > \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{24h-23}.$$

Обозначая через $[x]$ максимальное целое число, меньшее x, имеем при $h>3$:

$$n_h=\left[\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{24h-23}\right].$$

Для $h=2$ и $h=3$ эта формула также дает верные значения $n_6=6$ и $n_6=7$, хотя она и неприменима. В случае $h=1$ формула дает другое значение, именно 4 вместо 6. Это значение по всем данным правильное, так как до сих пор не было найдено такого деления плоскости на области, при котором четырех красок было бы недостаточно; однако строго доказать это до сих пор не удалось. В приводимой таблице приведены значения n_h для $h=1$ и до $h=13$.

$h=$	$n_h=$	h	$n_h=$
1	6 ([4,000] = 4)	8	[10,000] = 10
2	6 ([6,000] = 6)	9	[10,447] = 10
3	7 ([7,000] = 7)	10	[10,866] = 10
4	[7,775] = 7	11	[11,264] = 11
5	[8,425] = 8	12	[11,640] = 11
6	[9,000] = 9	13	[12,000] = 12
7	[9,522] = 9		

Пока мы доказали только, что эти числа красок достаточны для раскраски. Можно было бы думать, что существуют поверхности связности h, для которых можно всегда обойтись меньшим, чем n_h, числом красок. Однако для $h=2$, 3, 5, 7, 9, 11, 13 доказано, что могут быть в точности n_h соседних областей. Следовательно, в этих случаях наверно нельзя обойтись меньше, чем n_h красками, и, таким образом, для этих случаев задача о красках полностью разрешена. Для всех других замкнутых поверхностей числа n_h представляют верхнюю границу для числа соседних областей.

В задаче о красках особенно бросается в глаза, что интуитивно ясное для плоскости предложение до сих пор строго не доказано. Подобного рода трудности встречаются в математике очень часто, когда хотят чисто логически, путем приведения к числам, понять наглядные вещи. В качестве еще одного примера назовем теорему о том, что замкнутая кривая, не имеющая двойных точек, разбивает плоскость на две части, или что шар имеет наименьший объем из всех поверхностей данной площади. Обе эти теоремы потребовали довольно трудных и обстоятельных доказательств. Однако задача о четырех красках представляет значительно более исключительный пример подобного рода, ибо для этой задачи не видно, почему как раз с виду наиболее простой случай представляет такие трудности, в то время как наиболее сложные случаи могут быть разрешены.

ДОБАВЛЕНИЕ К ШЕСТОЙ ГЛАВЕ

1. Проективная плоскость в четырехмерном пространстве. Мы укажем алгебраическую поверхность в четырехмерном эвклидовом пространстве E_4, топологически эквивалентную проективной плоскости, но в противоположность поверхности Бойя не имеющую ни самопересечений, ни других особенностей. С этой целью будем исходить из шаровой поверхности

$$u^2+v^2+w^2=1 \tag{1}$$

и рассмотрим в декартовых координатах x, y, z, t пространства E_4 образ

$$x=u^2-v^2,\quad y=uv,\quad z=uw,\quad t=vw \tag{2}$$

для всех значений параметров u, v, w, удовлетворяющих уравнению (1).

Так как x, y, z, t суть однородные и квадратичные функции от u, v, w, то диаметрально противоположные точки шаровой поверхности (1) всегда будут изображаться одной и той же точкой (2) в пространстве E_4. Докажем теперь, что две недиаметральные точки поверхности (1) всегда соответствуют двум различным точкам (2). Возьмем сначала точку P сферы, для которой ни u, ни v, ни w не равны нулю. Тогда y, z, t отличны от нуля и определяют отношение $u:v:w$. Точка (2), соответствующая точке P, таким образом, не изображает никакой другой точки сферы, кроме точки P и диаметральной ей точки. Если w равно нулю, то u^2 и v^2 однозначно определяются из уравнений $u^2+v^2=1$, $u^2-v=x$. Соответствующая точка (2) может представлять только следующие четыре точки: $(u, v, 0)$, $(u, -v, 0)$, $(-u, v, 0)$, $(-u, -v, 0)$. Если при этом еще и $u=0$ или $v=0$, то эти четыре точки приводятся к паре диаметрально противоположных точек, и, следовательно, ничего не приходится больше доказывать. Если же $u \neq 0$, $v \neq 0$, то следует привлечь еще уравнение $y=uv$, которое выделяет из этих четырех точек уже пару диаметральных точек. Остается еще исследовать случаи, когда w отлично от нуля, но одна из переменных u, v исчезает, т. е. либо $u=0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$, либо $v=0$, $u \neq 0$, $w \neq 0$, либо наконец $u=v=0$, $w=\pm 1$. В первом случае имеем:

$$x=-v^2, \quad -x+w^2=1;$$

$vw=t$, и, следовательно, v^2, w^2 и vw известны. Аналогично во втором случае известны u^2, w и uw. В обоих случаях заключаем, как и в случае $w=0$, что соответствующая точка (x, y, z) образа (2) представляет только одну пару диаметральных точек шара (1). В третьем случае доказывать нечего, так как этот случай и так имеет место только для двух диаметральных точек шара (1). Таким образом уравнения (2) вместе с дополнительным условием (1) представляют взаимно однозначно и непрерывно сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками, т. е. проективную плоскость.

Легко исключить u, v, w из уравнений, определяющих модель. Именно, из трех последних уравнений (2) следует:

$$\frac{yz}{t}=u^2; \quad \frac{yt}{z}=v^2; \quad \frac{zt}{y}=w^2.$$

Отсюда первое уравнение (2) переходит в

$$y(z-t)=xzt, \tag{3}$$

а уравнение (1) превращается в

$$y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2=yzt. \tag{4}$$

Поэтому данная модель содержится в пересечении гиперповерхностей (3) и (4).

В том, что эта модель не имеет особенностей, т. е. обладает всюду непрерывной касательной плоскостью, легко убедиться, если на шаре (1) представить u, v, w как функции двух независимых параметров и при помощи уравнений (2) исследовать x, y, z, t в этой параметрической форме.

2. Эвклидова плоскость в четырехмерном пространстве. Все поверхности пространства E_3, изометричные эвклидовой плоскости, простираются в бесконечность, так как они необходимо должны быть линейчатыми поверхностями. Напротив, в пространстве E_4 существуют поверхности, изометричные плоскости в малом, и не являющиеся линейчатыми поверхностями. Дадим пример подобной поверхности F; она целиком расположена в конечной области и топологически эквивалентна поверхности тора. Эта поверхность F представляется в параметрической форме очень просто:

$$x_1 = \cos u, \quad x_3 = \cos v,$$
$$x_2 = \sin u, \quad x_4 = \sin v.$$

Линейный элемент поверхности F есть

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 =$$
$$= \sin^2 u\, du^2 + \cos^2 u\, du^2 + \sin^2 v\, dv^2 + \cos^2 v\, dv^2 = du^2 + dv^2.$$

Таким образом поверхность F в самом деле изометрична плоскости с прямоугольными координатами u, v. Эта поверхность целиком расположена в конечной области, так как все координаты лежат между -1 и $+1$. Впрочем можно представить поверхность F как сечение двух трехмерных гиперцилиндров $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и $x_3^2 + x_4^2 = 1$. Все точки поверхности F можно получить, если заставить u, v в декартовой плоскости координат (u, v) пробегать все точки квадрата со сторонами, параллельными осям и имеющими длину 2π. Различным внутренним точкам квадрата соответствуют различные точки поверхности F. Наоборот, две граничные точки квадрата представляют одну и ту же точку поверхности F, если они расположены на одной и той же прямой u-const., или v-const. на противоположных сторонах квадрата. Следовательно, F есть поверхность тора, а (u, v)-плоскость есть универсальная поверхность наложения для поверхности F.

Можно было бы попытаться осуществить эвклидову геометрию на замкнутых поверхностях, не имеющих вида тора. Оказывается, однако, что для этого можно взять только бутылку Клейна. Но на замкнутых поверхностях со связностью $h > 3$ и только на них можно осуществить гиперболическую геометрию. Эллиптическая геометрия не может быть осуществлена ни на какой замкнутой поверхности, кроме шара и проективной плоскости. Эти теоремы можно вывести из диференциально-геометрической формулы Бонне относительно полной кривизны.

УКАЗАТЕЛЬ